~~B. 3111. a.~~
Astr. P. 70.

Mathesis. Astronomia. Systema mundi
862.

<36623490270012 S
<36623490270012
Bayer. Staatsbibliothek

Theorie der Bewegung der Weltkörper unseres Sonnensystems, und ihrer elliptischen Figur,

nach

Herrn de la Place

frey bearbeitet

von

Johann Joseph Anton Ide.

Mit einer Vorrede

des

Herrn Hofraths Kästner.

Berlin 1800.
Bei Heinrich Frölich.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorrede.

Théorie du mouvement et de la figure elliptique des Planètes, par M. de la Place de l'Ac. Roy: des Sc. et de celle de Turin; Examinateur des Eléves et Aspirans du Corps Royal de l'Artillerie, Inspecteur et Examinateur des Eléves de l'Ecole du Génie de la Marine, erschien zu Paris 1784; 153 Quartseiten. Ich gab davon eine kurze Nachricht in den Gótting. Gel. Anz. 1786, 10 S.

Mit diesem Werke hat Herr Ide sich beschäftigt. Ich glaube es ist nicht überflüssig bey Lieferung eines Buchs in unserer Sprache den Titel des Grundtextes anzugeben.

Der Parlamentspräsident de Saron wünschte, Herr de la Place mögte die Eigenschaften elliptischer und parabolischer Bewegungen bloß aus Betrachtung der Differenzialgleichungen des zweyten Grades herleiten, die jeden Augenblick die Bewegung der Himmelskörper um die Sonne bestimmen. Herr de la Place suchte dieses Verlangen zu erfüllen und de Saron hat das Werk drucken lassen.

Des ersten Theils Anfang, machen Differentialgleichungen zwischen rechtwinklichten Coordinaten einer Planetenbahn, und der Weite von der Sonne.

Die Haupteigenschaften der Bewegungen der Weltkörper werden aus Integration dieser Gleichungen hergeleitet, auch wird gewiesen, wie man vermittelst dreyer rechtwinklichter Coordinaten die Bewegung auf irgend eine feste Ebene bezieht.

Von den Secularungleichheiten. Elemente des neuen Planeten den Herr Herschel entdeckt. Wie Elemente der Kometenbahnen bestimmt und verbessert werden. Berechnung der Masse der Planeten, welche Begleiter haben. So weit der erste Theil, von elliptischer Bewegung der Planeten, der zweyte betrifft der Planeten Gestalt.

Man wird aus dem Beygebrachten sehen, daß Herr Ide sich nicht auf das Geschäft eines bloßen Uebersetzers einschränkt. Er giebt als Vorberei-

tung, Lehren die überall in der Analysis des Unendlichen von größtem Nutzen sind, und ändert Ordnung und Vortrag wie es ihm der Deutlichkeit und Ueberzeugung am gemäßesten geschienen hat. Hoffentlich ist dadurch das deutsche Werk Liebhabern der Wissenschaft lehrreicher geworden, wo des französischen Verfasser geübte Kenner derselben voraussetzte.

Herr Ide ist vor einigen Jahren von Braunschweig hieher gekommen, mit Empfehlungsschreiben, deren er sich durch sein Verhalten vollkommen werth gezeigt hat. Meines Unterrichtes bediente er sich nur in Anfangsgründen; Ich schreibe mir also nichts von dem zu was er hier leistet, so wie ich ihm alles selbst zu verantworten überlasse, da meine Zeit mir umständliche Prüfung nicht verstattet.

In dem Journale: Frankreich; las ich vor einiger Zeit bey Gelegenheit des Unterrichts den berühmte Mathematiker im Nationalinstitute geben: die dasigen Studirenden fingen an, wo die Deutschen aufhörten; der Unterricht betraf nämlich höhere Mathematik, und setzte Anfangsgründe schon zum Voraus.

Der deutsche Mann der dieses schrieb, wußte also nicht, daß viel deutsche Studirende, nach gefaßten Anfangsgründen, höhere Mathematik für sich aus Büchern und durch Nachdenken, lernen. Vorlesungen darüber können allerdings jemanden die Erlernung erleichtern; besonders ersparen sie bey dem gewöhnlich kurzen Aufenthalte auf Universitäten, Zeit, die erfordert wird, Grundlehren, welche manchmal in Büchern nicht bestimmt angeführt sind, aufzusu-

chen, Rechnungen zu entwickeln, die nicht umständlich auseinander gesetzt sind; wem es aber an Zeit und Geduld nicht fehlt, der wird vielleicht selbst mit mehr Vergnügen und Vortheile Augen und Verstand brauchen, als die Ohren.

Ueber Rechnung des Unendlichen habe ich keinen mündlichen Unterricht genossen, als was Hausen davon in seinen Elementis erklärte, und besaß als Anleitung dazu nur Wolfs Elementa matheseos. Damit machte ich mich nun 1737 an Eulers Mechanik und fand den ersten Aufenthalt, bey einem Differentiale, das nach Joh. Bernoullis Methode in Brüche mußte zerlegt werden, davon die Integrale Logarithmen sind. Zum Glücke las ich um eben die Zeit die Acta Eruditorum nach

der Reihe durch und kam auf Bernoullis Abhandlung.

Diese Beschwerde kann beym Selbststudiren entstehen, daß ein Schriftsteller etwas voraussetzt, von dem der Leser noch keinen Unterricht hat. Es müßte eine sehr weitläuftige Theorie seyn, einzelne Lehnsätze kann man sich immer selbst auffinden, und seit meinem erwähnten Schicksale beym Euler hat man analytische Theorien so ziemlich in Systeme und Lehrbücher gesammelt.

Hier sind mir viel Studirende bekannt geworden, die Anfangsgründe der höhern Mathematik aus meinen Büchern gelernt hatten, und Vorlesungen darüber nicht verlangten. Selbst rathe ich demjenigen, der nicht ganz für sich arbeiten will,

statt förmlicher Vorlesungen Hülfsleistung zu gebrauchen. Noch in Leipzig meldete sich ein Russe bey mir, der Richmanns Schüler gewesen war, bey seiner Bestimmung für Mathematik meinen Rath gegründet fand, Eulers Mechanik zu studiren. Weil ich mir über das Buch einen commentarium perpetuum aufgeschrieben hatte, so verband ich mich nicht, alles nach der Reihe durchzugehen: Er sollte das Werk für sich lesen, und in den Lehrstunden mir die Stellen anzeigen, wo er Hinderniß gefunden hatte, die ich ihm dann sogleich heben wollte. Freylich, daß er manchmal lange blätterte eh' er fand was er fragen wollte, veranlaßte mir eben keinen Schluß auf seine vollkommene Einsicht in das was er überschlug.

Das zum Troste für deutsche Studirende, die einen la Lande, la Grange, la Place . . . nicht hören können, aber doch lesen. Und, eine Erfahrung, die meine Aeußerungen bestätigt, Herrn Ides Beyspiel.

Als Probe seines Fleißes und seiner Kenntnisse, hätte schon eine treue Uebersetzung befriedigt. Sein Verfahren zeigt noch mehr wie viel Gefallen er an der Wissenschaft hat, und wieviel Eifer er für sie besitzt.

Er hatte sich zu seiner Arbeit des Exemplars vom Originale bedient, das sich auf hiesiger öffentlichen Bibliothek befindet. So war ihm ein verwandter Aufsatz unbekannt geblieben: Théorie des attractions des sphéroides et de la figure des

Planètes par M. de la Place de l'Ac. R. des Sc. Paris 1785, 84 Quartſ. Aus Hiſt. et Mem. de l'Ac. R. d. Sc. 1782. beſonders abgedruckt.

Göttingen im September 1799.

Abraham Gotthelf Käſtner.

Einige analytische Sätze, welche in der Folge gebraucht werden.

I. Taylor's Theorem.

§. 1.

Es sey y eine Function von x, welche für $x=0$ den Werth Y bekomme; für eben diesen Fall, wo $x=0$ ist, mögen Y', Y'', Y''' u. s. f. die verschiedenen bestimmten Werthe der Differenzial-Functionen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{d^2x}$, $\frac{d^3y}{d^3x}$ u. s. f. seyn, so läßt sich y durch folgende nach den Potenzen von x fortgehende Reihe ausdrücken:

$$y=Y+xY'+\frac{x^2}{1.\,2}Y''+\frac{x^3}{1.\,2.\,3.}Y'''+\text{u. s. f.}$$

Beweis. 1) Man nehme für y folgende unbestimmte Reihe an:

$$y=a+bx+cx^2+dx^3+\ldots$$

unter der sich gewiß y allemal darstellen läßt, da bekanntlich jede Function nach gehöriger Umformung in eine Reihe entwickelt werden kann, die

wenigstens lauter ganze Potenzen der veränderlichen Größe enthält. Diese Reihe soll für jeden Werth von x den dazu gehörigen Werth von y geben, also muß man aus ihr für $x = 0$, $y = Y$ erhalten. Da nun in diesem Falle von der Reihe bloß das erste Glied a bleibt, so muß $a = Y$ seyn.

2) Man differenziire auf beyden Seiten, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + \ldots$$

Setzt man nun wieder $x = 0$, so wird $\frac{dy}{dx} = Y'$, und die Reihe giebt für $\frac{dy}{dx}$, den Werth b; also ist $b = Y'$.

3) Durch abermaliges Differenziiren bekommt man:

$$\frac{d^2y}{d^2x} = 2c + 2.\,3\,dx + 3.\,4\,ex^2 + \ldots$$

und, wenn man x von neuem $= 0$ setzt, $2c = Y''$, oder $c = \frac{Y''}{1.\,2}$. Eben so wird durch fortgesetztes Differenziiren $d = \frac{Y'''}{1.\,2.\,3}$, $e = \frac{Y''''}{1.\,2.\,3.\,4}$. u. s. f.

4) Um das Gesetz der Coefficienten allgemein zu übersehen, bezeichne man den Coefficienten des

Gliedes, worinn x^n vorkommt, durch kn, so wird nach der $n$ten Differenziirung: $\frac{d^n y}{dx^n} = 1.2.3 \ldots nkn + 1.2 \ldots n+1.k(n+1).x + \ldots$, also giebt $x = 0$:

$Y(n) = 1.2.3 \ldots n.kn$, und folglich wird

$$kn = \frac{1}{1.2.3 \ldots n} Y(n).$$

5) Man erhält also, wenn man die gefundenen Werthe der Coefficienten in die (1) angenommene Reihe substituirt:

$$y = Y + xY' + \frac{x^2}{1.2} Y'' + \frac{x^3}{1.2.3} Y''' + \ldots + \frac{x^n}{1.2 \ldots n} Y^{(n)} + \ldots$$

Anmerkung. Die Annahme: $y = a + bx + cx^2 +$ u. s. f. bedarf noch einer Rechtfertigung, Es giebt Functionen, die sich nicht unmittelbar in eine solche Reihe auflösen lassen, aber durch Umformung kann man sie jederzeit dazu geschickt machen. Diese besteht allgemein darinn, daß man $f + gu$ an die Stelle von x setzt, und so in die Function die veränderliche Größe u einführt, in welcher Form sie dann entwickelt, allemal eine nach positiven und ganzen Potenzen von u fortlaufende Reihe geben muß. Es wird nemlich jedes Glied kx^m in der nach x fortgehenden Reihe dadurch zu

einer Binomial-Potenz $k(f+gu)^m$, die allemal eine aus lauter ganzen und positiven Potenzen von m bestehende Reihe giebt. Auf diese Weise kann in gedachter Reihe weder eine Bruch-Potenz, noch eine mit negativem Exponenten zurückbleiben.

Hätte y noch nicht diese verlangte Form, so würde der Satz (1) falsch werden. Dies zeigen aber immer die Coefficienten Y, Y' u. s. f. an, welche in diesem Falle unendlich werden, und dabey mit dem Zeichen abwechseln, so daß man eine Reihe der Gestalt: $\infty - \infty + \infty -$ u. s. f. erhält, die zwar nichts Widersprechendes, aber auch keinen bestimmten Sinn in sich faßt. Dahin gehören alle Functionen, die den Factor x^m enthalten, wo m entweder negativ oder ein Bruch ist; sie lassen sich unter dem allgemeinen Ausdrucke $x^m z$ darstellen, welcher nie einer Entwickelung nach ganzen Potenzen von x fähig ist. Zugleich ist aber auch: $\frac{d(x^m z)}{dx} = x^{m-1} z + x^m \cdot \frac{dz}{dx}$, welches Differenzial, so wie die folgenden, für $x=0$, unendlich wird.

§. 2.

Es bezeichne fx eine Function von x, so daß $f(x+i)$ dieselbe Function von $x+i$ bedeutet, und folglich $f(x+i)$ aus fx entspringt, wenn man

darin $x+i$ für x setzt, so läßt sich $f(x+i)$ auf folgende Art durch fx und deren Differenziale ausdrücken:

$$f(x+i) = fx + i\frac{d.fx}{dx} + \frac{i^2}{1.2}.\frac{d^2fx}{dx^2} + \frac{i^3}{1.2.3}\frac{d^3.fx}{dx^3} + \ldots$$

Beweis 1) Wenn man i sowohl als x als veränderlich annimmt, so hat bekanntlich $d.f(x+i)$ die Form: $Pdx + Qdi$ wovon das eine und das andere Glied die partiellen Differenziale der Function ausdrücken, je nachdem man bloß x oder i als veränderlich annimmt. Man setze $d.f.x = f'x.dx$, so wird, indem man $x+i$ für x setzt, $df(x+i) = f'(x+i)\,d(x+i) = f'(x+i)dx + f'(x+i)di$, folglich $P = Q = f'(x+i)$, oder nach der gewöhnlichen Bezeichnung der partiellen Differenziale

$$\left(\frac{df.(x+i)}{dx}\right) = \left(\frac{df(x+i)}{di}\right).$$

2) Vermöge der vorigen Bezeichnung ist ferner $\frac{d^2.f(x+i)}{d(x+i)^2} = \frac{d.f'(x+i)}{d(x+i)}$; setzt man also wiederum $d.f'x = f''xdx$ so wird $d.f'(x+i) = f''(x+i)\,d(x+i) = f''(x+i)\,dx + f''(x+i)\,di$, folglich sind wieder die partiellen Differenziale von $f'(x+i)$ einander gleich, oder es ist $\left(\frac{d.f'(x+i)}{dx}\right)$

$= \left(\frac{d.f'(x+i)}{di}\right) = f''\ (x+i)$, also auch $\left(\frac{d^2 f(x+i)}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^2 f(x+i)}{di^2}\right)$, und man sieht leicht, wie man dies ferner von den höhern Differenzialen darthun könne.

3) Man betrachte jetzt x als beständig; so daß f(x+i) allein von i abhänge, so wird vermöge §. 1:

$$f(x+i) = fx + i.\frac{df(x+i)}{di} + \frac{i^2}{1.2}\frac{d^2.f(x+i)}{di^2} + \frac{i^3}{1.2.3}\frac{d^3 f(x+i)}{di^3} + \ldots$$

nachdem man allenthalben in den Differenzial-Quotienten $i=0$ gesetzt hat. Da wir nun gesehen haben, daß $\left(\frac{df(x+i)}{di}\right) = \left(\frac{df(x+i)}{dx}\right)$, und überhaupt $\left(\frac{d^n f(x+i)}{di^n}\right) = \left(\frac{d^n f(x+i)}{dx^n}\right)$ sey, so sind auch diese Werthe für $i=0$ einander gleich. Endlich ist es bekannt, daß es einerley sey, ob man eine beständige Größe in einer Function nach der Differenziirung derselben $=0$ setze, oder dies vorher thue. Demnach wird, da in den Ausdrücken letzterer Art $\left(\frac{d^n f(x+i)}{dx^n}\right)$ die Größe i beständig ist, der Werth von $\left(\frac{d^n f(x+i)}{dx^n}\right)$

für $i=0$, $=\frac{d^n fx}{dx^n}$, und diesen allenthalben für $\left(\frac{d^n f(x+i)}{di^n}\right)$ in den Gliedern der Reihe substituirt, erhält man:

$$f(x+i)=fx+i\,\frac{d.fx}{dx}+\frac{i^2}{1.2.}\,\frac{d^2fx}{dx^2}+\frac{i^3}{1.2.3}\,\frac{d^3fx}{dx^3}+\ldots$$

II. La Grange's Theorem.

§. 3.

Es sey W eine Function von y und z, so ist $(d^\varrho\left(\frac{d^r W}{dz^r}\right):dy^\varrho)=(d^r\left(\frac{d^\varrho W}{dy^\varrho}\right):dz^r)$ oder es ist einerley, ob man von W zuerst das rte Differenzial nach z, und dann das ϱte Differenzial nach y nimmt, oder Letzteres zuerst thut, und dann Ersteres.

1) Eine bekannte Eigenschaft der partiellen Differenzialen ist, daß man allemal $\frac{\left(d\left(\frac{dW}{dz}\right)\right)}{dy}$ $=\frac{\left(d\left(\frac{dW}{dy}\right)\right)}{dz}$ hat, oder daß wenn wir $dW=Pdy+Qdz$ setzen, allemal $\left(\frac{dP}{dz}\right)=\left(\frac{dQ}{dy}\right)$ ist. Wenn

wir von diesem Satze ausgehen, so ist jener allgemeine bloß eine weitere Fortsetzung dieser Untersuchung.

2) Um die Ausdrücke abzukürzen, wollen wir das partielle Differenzial $\left(\frac{d^m W}{d z^m}\right)$ durch $^z d^m W$, und eben so $\left(\frac{d^m W}{d y^m}\right)$ durch $^y d^m W$ bezeichnen, so wird zuerst:
$^y d . {}^z d^2 W = {}^y d . {}^z d . ({}^z dW) = {}^z d . {}^y d ({}^z dW)$, (n1) $= {}^z d ({}^y d\, {}^z dW) = {}^z d ({}^z d\, {}^y dW) = {}^z d . {}^z d ({}^y dW) = {}^z d^2 ({}^y dW)$, und man sieht leicht, wie man eben so beweisen könne, daß $^y d ({}^z d^3 W) = {}^z d^3 ({}^y dW)$ sey. Dies führt auf die Vermuthung, es könne wol allgemein $^y d ({}^z d^r W) = {}^z d^r ({}^y dW)$ seyn.

3) Diese zu rechtfertigen, nehme man an, n sey eine von den Zahlen wofür dies schon bewiesen ist, so daß wir setzen dürfen, es sey: $^y d({}^z d^n W) = {}^z d^n ({}^y dW)$. Alsdann wird $^y d({}^z d^{n+1} W) = {}^y d\, {}^z d({}^z d^n W) = {}^z d\, {}^y d({}^z d^n W) = {}^z d({}^y d\, {}^z d^n W) = {}^z d({}^z d^n\, {}^y dW) = {}^z d\, {}^z d^n ({}^y dW) = {}^z d^{n+1} ({}^y dW)$. Der Satz gilt also allemal für $n+1$, wenn er für n gilt, und folglich gilt er nunmehr für jede ganze Zahl, ohne Einschränkung.

4) Ferner ist nun $^y d^2 ({}^z d^r W) = {}^y d ({}^y d\, {}^z d^r W) = {}^y d ({}^z d^r\, {}^y dW)$ (no 3) $= {}^y d\, {}^z d^r ({}^y dW)$

$= {}^{z}d^{r}\,{}^{y}d({}^{y}dW) = {}^{z}d^{r}\,{}^{y}d^{2}W$. Eben so zeigt man leicht, daß ${}^{y}d^{3}({}^{z}d^{r}W) = {}^{z}d^{r}({}^{y}d^{3}W)$ u. s. f. Nimmt man also an, man habe auf diese Weise für eine Zahl n bewiesen, daß ${}^{y}d^{n}({}^{z}d^{r}W) = {}^{z}d^{r}({}^{y}d^{n}W)$ sey, so wird ${}^{y}d^{n+1}({}^{z}d^{r}W) = {}^{y}d({}^{y}d^{n}\,{}^{z}d^{r}W) = {}^{y}d({}^{z}d^{r}\,{}^{y}d^{n}W)$

$= {}^{y}d\,{}^{z}d^{r}({}^{y}d^{n}W) = {}^{z}d^{r}\,{}^{y}d({}^{y}d^{n}W) =$ ${}^{z}d^{r}({}^{y}d^{n+1}W)$, und folglich gilt auch diese letztere Vermuthung von jeder um 1 größern Zahl $n+1$, wenn sie für n gilt, also ebenfalls allgemein; wir haben daher ${}^{y}d^{\varrho}({}^{z}d^{r}W) = {}^{z}d^{r}({}^{y}d^{\varrho}W)$, es mögen ϱ und r Zahlen seyn, welche es wollen.

5) Es wird nicht überflüssig seyn, zu bemerken, daß man in der Analysis häufig auf Sätze stößt, die diesem ganz analog sind, selbst in der gemeinen Arithmetik giebt es deren eine Menge. Um nur einige anzuführen, so ist $\sqrt[n]{\ }\cdot\sqrt[m]{f} = \sqrt[m]{\ }\sqrt[n]{f}$,

$A \times m \times n = A \times n \times m$, $\sqrt[m]{(a^{n})} = (\sqrt[m]{a})^{n}$.

§. 4.

Es sey zwischen den veränderlichen Größen x, y und z folgende Gleichung gegeben: $y = x - z.Fx$, wo Fx irgend eine Function von x bedeutet. Auf gleiche Weise bezeichne fx jede beliebige andere Function von x, so läßt sich diese durch folgende nach den Potenzen von z fortgehende Reihe ausdrücken:

$$fx = fy + zFy\,\frac{d.fy}{dy} + z^2.\frac{d\left((Fy^2)\frac{d.fy}{dy}\right)}{1.2.dy}$$

$$+ z^3\frac{d^2\left((Fy)^3.\frac{dfy}{dy}\right)}{1.2.3dy^2} + \ldots + z^n$$

$$\frac{d^{n-1}\left((Fy)^n\frac{dfy}{dy}\right)}{1.2.3\ldots ndy^{n-1}} + \ldots$$

Beweis. 1) Da die Größe x, und folglich auch fx bloß von y und z abhängt, so kann man folgende Reihe dafür annehmen:

$$fx = Y + Y'z + Y''z^2 + Y'''z^3 + \ldots$$

in welcher die Coefficienten Y, Y', Y'' u. s. f. Ausdrücke sind, die bloß y enthalten: denn man nehme in der Function fx zuerst bloß z als veränderlich an, so läßt sich in diesem Falle fx, als bloße Function von z betrachtet, durch eine nach den Potenzen von z fortgehende Reihe darstellen, deren Coefficienten beständige Größen sind. Verändert man nun y, so kann dies bloß Bezug auf die Coefficienten haben, folglich müssen diese, da sie für jedes bestimmte y unveränderlich sind, bloß von y abhängige Größen seyn, und man ist also berechtigt, obige Reihe für fx anzunehmen.

2) Setzt man $z=0$, so wird vermöge der gegebenen Gleichung: $y = x - zFx$, $x = y$, also

$fx = fy$. Die angenommene Reihe aber giebt für $z = o$, $fx = Y$, also erhalten wir $Y = fy$.

3) Differenziirt man die (1) angenommene Gleichung nach z, so wird:

$$\left(\frac{d.fx}{dz}\right) = Y' + 2Y''z + 3Y'''z^2 + 4Y''''z^3$$

$+ \ldots nY^{(n)}z^{n-1} \ldots$ Man setze wieder $z = o$, so erhält man $Y' = \left(\frac{dfx}{dz}\right)$, wenn z in diesem Ausdrucke $= o$ gesetzt wird. Auf gleiche Art wird, wenn man von neuem differenziirt, und dann $z = o$ setzt, $Y'' = \frac{1}{1.2}$. x mit dem Werthe von $\left(\frac{d^2fx}{dz^2}\right)$ für $z = o$. Ueberhaupt wird nach nmal angestellter Differenziirung $\left(\frac{d^nfx}{dz^n}\right) = 1.2.3 \ldots nY^{(n)} +$

$1.2.3 \ldots (n+1)Y^{(n+1)}z + 3.4 \ldots (n+2)$
$Y^{(n+1)}z^2 + \ldots$

woraus wir für $z = o$ erhalten:

$1.2.3 \ldots nY^{(n)} =$ dem Werthe von $\left(\frac{d^nfx}{dz^n}\right)$ für $z = o$.

und $Y^{(n)} = \frac{1}{1.2.3 \ldots n}\left(\frac{d^nfx}{dz^n}\right)$ für $z = o$.

4) Es beruhet jetzt darauf die Ausdrücke wie $\left(\frac{d^nfx}{dz^n}\right)$ für $z = o$, gehörig zu bestimmen. Man

setze $\frac{d.Fx}{dx} = F'x$, so giebt die Gleichung $y = x - z.Fx$ durchs Differenziiren folgende: $\frac{dy}{dx} = 1 - zF'x - Fx.\frac{dz}{dx}$ oder $\frac{dy + Fx.dz}{dx} = 1 - zF'x$, und $dx = \frac{dy + dzFx.}{1 - zF'x}$, woraus $\left(\frac{dx}{dz}\right) = \frac{Fx}{1 - zF'x}$ und $\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{1}{1 - zF'x}$ wird, und folglich hat man $\left(\frac{dx}{dz}\right) = Fx\left(\frac{dx}{dy}\right)$.

5) Nun sey $\frac{d.fx}{dx} = f'x$, so wird, wenn wir mit $f'x$ letztere Gleichung multipliciren, $f'x\left(\frac{dx}{dz}\right) = Fx.f'x\left(\frac{dx}{dy}\right)$. Aber es ist $f'x\left(\frac{dx}{dy}\right) = \left(\frac{dfx}{dy}\right)$, und $f'x\left(\frac{dx}{dz}\right) = \left(\frac{dfx}{dz}\right)$: denn es sei $dx = Pdy + Qdz$, so wird $d.fx = f'xdx = Pf'xdy + Qf'xdz$; also, wenn y bloß als veränderlich angenommen wird, $\left(\frac{d.fx}{dy}\right) = Pf'x = f'x\left(\frac{dx}{dy}\right)$, und wenn man z bloß als veränderlich annimmt, $\left(\frac{dfx}{dz}\right) = Qf'x = f'x\left(\frac{dx}{dz}\right)$.

Diese Werthe für $f'x\left(\frac{dx}{dy}\right)$ und $f'x\left(\frac{dx}{dz}\right)$ in vorige Gleichung gesetzt, geben: $\left(\frac{dfx}{dz}\right)=Fx\left(\frac{dfx}{dy}\right)$.

6) Diese Gleichung von neuem differenziirt, indem man bloß z als veränderlich ansieht, giebt $\left(\frac{d^2 fx}{dz^2}\right)=\left[\frac{d\left(Fx.\frac{dfx}{dy}\right)}{dz}\right]$.

Nun sey $Fx.dfx=dW$, so wird, wenn man $dz=o$ setzt, $\left(\frac{dW}{dy}\right)=Fx.\left(\frac{dfx}{dy}\right)$ oder $Fx.{}^y dfx={}^y dW$, und ${}^z d(Fx.{}^y dfx)={}^z d\,{}^y dW={}^y d\,{}^z dW$, also

$$\left(\frac{d^2 fx}{dz^2}\right)=\left[\frac{d\left(Fx\left(\frac{dfx}{dz}\right)\right)}{dy}\right]$$

$$=\left[\frac{d\left(Fx^2\left(\frac{dfx}{dy}\right)\right)}{dy}\right] \text{(no 4)}.$$

7) Man sieht leicht, daß man diese Operation auf gleiche Weise wiederholen könne, und daß im Allgemeinen seyn werde:

$\left(\frac{d^n fx}{dz^n}\right)=\left(\frac{d^{n-1}\left((Fx)^n\frac{dfx}{dy}\right)}{dy^{n-1}}\right)$. Um dies allgemein darzuthun, setze man die Gleichung gelte

für ein bestimmtes n, so wird durch neue Differenziirung nach z

$$\left(\frac{d^{n+1}fx}{dz^{n+1}}\right) = {}^z d \left(\frac{d^{n-1}\left((Fx)^n . \frac{dfx}{dy} \right)}{dy^{n-1}} \right).$$

Es sey nun $(Fx)^n . \underline{dfx} = (Fx)^n f'dx = dW$,

so wird $\left(\frac{dW}{dy}\right) = (Fx)^n . f' \left(\frac{dx}{dy}\right)$

$= (Fx^n . \left(\frac{dfx}{dy}\right)$ und $\left(\frac{dW}{dz}\right) = (Fx)^n \left(\frac{dfx}{dz}\right)$

$= (Fx)^{n+1} \left(\frac{dfx}{dy}\right)$ also $\left(\frac{d^{n+1}fx}{dz^{n+1}}\right)$

$= {}^z d . {}^y d^{n-1} \left(\frac{dW}{dy}\right) = {}^z d {}^y d^n . W = {}^y d^n . {}^z dW$

$$= {}^y d^n \left((Fx)^{n+1} \frac{dfx}{dy} \right) = \left(\frac{d^n (Fx)^{n+1} \frac{dfx}{dy}}{dy^n} \right),$$

also ist jenes Gesetz allgemein.

8) Substituirt man das Gefundene für $\left(\frac{d^n fx}{dz^n}\right)$ in dem Ausdrucke für den Coefficienten $Y^{(n)}$, (no 3) so wird:

$$Y^{(n)} = \frac{1}{1.2.3..n} \left[\frac{d^{n-1}(Fx)^n \left(\frac{dfx}{dy}\right)}{dy^{n-1}} \right]$$

für $z = o$.

Nun ist z in diesem Ausdrucke eine beständige Größe, und es ist bekanntlich einerley, ob man eine

Größe erst differenziirt, und dann im Differenziale eine der beständigen Größen, welche im Ausdrucke vorkamen $=0$ setzt, oder ob man dies vorher thut, und dann differenziirt. Wir können also, um den Werth jenes Ausdrucks für $z=0$ zu erhalten, in den Größen, welche unter dem Differenzialzeichen stehen, $z=0$ setzen. Dadurch aber wird $y=x$, folglich $Fx=Fy$ und $fx=fy$, also hat man:

$$Y^{(n)} = \frac{d^{n-1}\left((Fy)^n \frac{dfy}{dy}\right)}{1.2.3..n\, dy^{n-1}},$$

und mithin ist das Gesetz der Reihe für fx allgemein erwiesen.

III. Methode, aus endlichen Differenzen einer veränderlichen Größe, bestimmte Werthe ihrer Differenzialquotienten von jeder Ordnung zu finden.

§. 5.

Es sey z eine Function von t, welche für $t=\vartheta$ den bestimmten Werth z bekomme. Ferner seyen der Reihe nach folgende Werthe von z bekannt: für $\vartheta+i$ sey $z=\zeta$; für $\vartheta+i'=\zeta'$; für $\vartheta+i''=\zeta''$ u. s. f. Es sey ferner $\frac{\zeta'-\zeta}{i'-i}$ oder

$$\frac{\Delta\zeta}{i'-i} = \delta\zeta, \quad \frac{\Delta\zeta'}{i''-i'} = \delta\zeta' \quad \frac{\Delta\zeta''}{i'''-i''} = \delta\zeta'' \ldots$$

Ferner $\frac{\Delta\delta\zeta}{i''-i} = \delta^2\zeta$, $\frac{\Delta\delta\zeta'}{i'''-i'} = \delta^2\zeta'$, $\frac{\Delta.\delta\zeta''}{i''''-i''}$ $= \delta^2\zeta''$ u. s. f. Dann $\frac{\Delta\delta^2\zeta}{i'''-i} = \delta^3\zeta$, $\frac{\Delta\delta^2\zeta'}{i''''-i'}$ $= \delta^3\zeta'$ u. s. f. $\frac{\Delta\delta^3\zeta}{i''''-i} = \delta^4\zeta$ u. s. f., so wird, wenn wir durch $\frac{dZ}{dt}$ den Werth von $\frac{dz}{dt}$ für $t = \vartheta$, durch $\frac{d^2Z}{dt^2}$ den Werth von $\frac{d^2z}{dt^2}$ in eben dem Falle u. s. f. ausdrücken:

$$\frac{dZ}{dt} = \delta\zeta - (i + i')\,\delta^2\zeta + (i.i' + i.i'' + i'.i'')\,\delta^3\zeta - (i.i'.i'' + i.i'.i''' + ii''i''' + i'i''i''')\,\delta^4\zeta + \ldots$$

$$\frac{d\ Z}{1.2\,dt^2} = \delta^2\zeta - (i + i' + i'')\,\delta^3\zeta + (i.i' + i.i'' + i.i''' + i'i'' + i'i''' + i''i''')\,\delta^4\zeta + \ldots$$

von welchen Reihen das Gesetz der Coefficienten sehr einfach ist. So ist nemlich der Coefficient von $\delta^n\zeta$ der Reihe für $\frac{dZ}{dt}$, eine Summe der durch die $n-1$ fachen Verbindungen der ersten $n-1$ Größen i, i', i'' u. s. f. entstehenden Producte; der Coefficient zu $\delta^n\zeta$ der Reihe $\frac{d^2Z}{1.2\,dt^2}$, eine Summe der durch die $n-2$ fachen Verbindungen der ersten $n-1$ Größen hervorgebrachten Producte u. s. f.

Beweis.

Beweis. 1) Wir wollen der Kürze wegen $\frac{dZ}{dt} = Z'$, $\frac{d^2Z}{1.2\,dt^2} = Z''$ u. s. f. setzen, so wird:

$$\zeta = Z + iZ' + i^2Z'' + i^3Z''' + i^4Z'''' + \ldots$$
$$\zeta' = Z + i'Z' + i'^2Z'' + i'^3Z''' + i'^4Z'''' + \ldots$$

---

also $\Delta\zeta = (i' - i)Z' + (i'^2 - i^2)Z'' + (i'^3 - i^3)Z''' + (i'^4 i - i^4)Z'''' + \ldots$

und eben so hat man:

$$\Delta\zeta' = (i'' - i')Z' + (i''^2 - i'^2)Z'' + (i''^3 - i'^3)Z''' + (i''^4 - i'^4)Z'''' + .$$

2) Also wird:

$$\delta\zeta = Z' + (i' + i)Z'' + (i'^2 + i'i + i^2)Z''' + (i'^3 + i'^2 i + i'i^2 + i^3)Z'''' + .$$
$$\delta\zeta' = Z' + (i'' + i')Z'' + (i''^2 + i''i' + i'^2)Z''' + (i''^3 + i''^2 i' + i''i'^2 + i'^3)Z'''' + .$$

Dies giebt:

$$\Delta\delta\zeta = (i'' - i)Z'' + (i''^2 + i''i' - i'i - i^2)Z''' + (i''^3 + i''^2 i' + i''i'^2 - i'^2 i - i'i^2 - i^3)Z'''' + \ldots$$

und auf gleiche Weise ist:

$$\Delta\delta\zeta' = (i''' - i')Z'' + (i'''^2 + i'''i'' - i''i' - i'^2)Z''' + (i'''^3 + i'''^2 i'' + i'''i''^2 - i''^2 i' - i''i'^2 - i'^3)Z'''' + \ldots$$

und dadurch wird:

---

3) $\delta^2\zeta = Z'' + (i'' + i' + i)Z''' + (i''^2 + i''i' + i''i + i'^2 + i'i + i^2)Z'''' + \ldots$

und $\delta^2 \zeta' = Z'' + (i''' + i'' + i')Z''' + (i'''^2 + i'''i'' + i'''i' + i''^2 + i''i' + i'^2)Z'''' + \ldots$

---

also $\Delta\delta^2\zeta = (i''' - i)Z''' + (i'''^2 + i'''i'' + i'''i' - i''i - i'i - i^2)Z'''' \ldots$

Es bleiben nemlich alle Glieder der Coefficienten, welche i''' und i enthalten, die übrigen fallen weg. Eben so hat man nun:

$\Delta\delta^2\zeta' = (i'''' - i')Z''' \ldots$ also wird:

4) $\delta^3\zeta = Z''' + (i''' + i'' + i' + i)Z'''' + \ldots$

$\delta^3\zeta' = Z''' + (i'''' + i''' + i'' + i')Z'''' + \ldots$

also $\Delta\delta^3\zeta = (i'''' - i)Z'''' + \ldots$

und $\delta^4\zeta = Z'''' + \ldots$

5) Um jetzt Z' durch $\delta\zeta$, $\delta^2\zeta$ u. s. f. auszudrücken, hat man aus N° 2:

$Z' = \delta\zeta - (i' + i)Z'' - (i'^2 + i'i + i^2)Z''' - (i^3 + i'^2 i + i'i^2 + i^3)Z'''' + \ldots$

ferner aus N° 3:

$(i' + i)\delta^2\zeta = (i' + i)Z'' + (i''i' + i'^2 + ii' + i''i + i'i + i^2)Z''' + (i''^2 i' + i''i'^2 + i''ii' + i'^3 + i'ii' + i^2 i' + i''^2 i + i''i'i + i''i^2 + i'^2 i + i'i^2 + i^3)Z'''' + \ldots$

---

also wird:

$Z' + (i' + i)\delta^2\zeta = \delta\zeta + (i''i' + i''i + i'i)Z''' + (i''^2 i' + i''i'^2 + i''ii' + i''^2 i + i''i'i + i''i^2 + i'^2 i + i'i^2)Z'''' + .$

6) Nun ist ferner aus N°4:
$(i''i'+i''i+i'i)\delta^3\zeta=(i''i'+i''i+i'i)Z''' + i'''i''i'+i'''i''i+i'''i'i+i''^2i'+i''^2i + i''i'i+i'i''i'+i'i''i+i'i'i+ii''i'+ii''i + ii'i)Z''''+ .$

Dies auf beyden Seiten subtrahirt giebt:
$Z'+(i'+i)\delta^2\zeta-(i''i'+i''i+i'i)\delta^3\zeta=\delta\zeta -(i'''i''i'+i'''i''i+i'''i'i+i''i'i)Z''''+\ldots$

7) Endlich hat man aus N°4:
$(i'''i''i'+i'''+i''i+i'''i'i+i''i'i)\delta^4\zeta =(i'''i''i'+i'''i''i+i'''i'i+i''i'i)Z''''+..$

Dies beyderseits addirt, giebt:
$Z'+(i'+i)\delta^2\zeta-(i''i'+i''i+i'i)\delta^3\zeta+(i'''i''i' +i'''i''i+i'''i'i+i''i'i)\delta^4\zeta=\delta\zeta\ldots+\ldots Z'''''..$

8) Auf solche Weise schafft man nach und nach die folgenden Glieder weg, und man erhält:
$Z'=\delta\zeta-(i+i')\delta^2\zeta+(ii'+ii''+i'i'')\delta^3\zeta -(ii'i''+ii'i'''+ii''i'''+i'i''i''')\delta^4\zeta+\ldots$

9) Eben so wird nun aus (3)
$Z''=\delta^2\zeta-(i''+i'+i)Z'''-(i''^2+i''i' +i''i+i'^2+i'i+i^2)Z''''-..$

und aus (4)
$(i''+i'+i)\delta^3\zeta=(i''+i'+i)Z'''+i'''i'' +i'''i'+i'''i+i''^2+i''i'+i''i+i'i''+i'^2 +i'i+i.i''+i.i'+i^2)Z''''+..$

---

also:
$Z''+(i''+i'+i)\delta^3\zeta=\delta^2\zeta+(i'''i''+i'''i' +i'''i+i''i'+i''i+i'i)Z''''\ldots.$

10) Ferner ist $\delta^4 \zeta = Z'''' + \ldots$ Also wird, wenn wir auch Z'''' wegschaffen:

$$Z'' + (i'' + i' + i)\delta^3 \zeta - (i'''i'' + i'''i' + i'''i + i''i' + i''i + i'i)\delta^4 \zeta = \delta^2 \zeta + Z''''' + \ldots,$$

und da durch Fortsetzung dieser Operationen nach und nach alle Glieder, welche Z enthalten, wegfallen, so bildet sich für Z'' folgende Reihe:

$$Z'' = \delta^2 \zeta - (i + i' + i'')\delta^3 \zeta + (ii' + ii'' + ii''' + i'i'' + i'i''' + i''i''')\delta^4 \zeta - \ldots$$

11) Da wir von diesen Reihen nur die erstern beyden für Z' und Z'', und von diesen selbst nur die hier entwickelten vier ersten Glieder in der Folge gebrauchen werden, so ist gegenwärtiger Calcul zu unserm Zwecke hinreichend, und jeder kann selbst von der ferneren Richtigkeit des oben angegebenen Gesetzes sich überzeugen. Es würde wol schwer halten, dasselbe allgemein erweisen zu wollen.

IV. Analytische Methode, beynahe gefundene Werthe zu berichtigen.

§. 6.

Aufgabe. Es sey z eine solche Function von x, daß man zwar für jedes x den dazu gehörigen Werth von z, aber nicht umgekehrt für jeden Werth von z, das dazu gehörige x direct finden kann. Gesetzt nun es sey von z irgend ein Werth Z gegeben, und man habe den dazu gehörigen von

x beynahe gefunden, die Abweichung von dem wahren Werthe durch Näherung zu bestimmen.

Auflösung. 1) Man nenne X den eigentlichen zu Z gehörigen Werth von x; X′ den gefundenen beynahe wahren, und setze $X' = X + \omega$. Man nehme nun einen zweyten hypothetischen Werth für x an, den wir X″ nennen wollen, und es sey $X'' = X + \omega'$, so wird für X′ der Werth von z, da er für X = Z ist, $= Z + \omega Z' + \omega^2 . Z'' + ..$, wenn wir die Ausdrücke Z′ und Z″ wieder in der Bedeutung (5. 1) nehmen, und für X″ wird derselbe:

$$Z + \omega' Z' + \omega'^2 . Z'' + ...$$

2) Nach der Voraussetzung sind ω und ω′ sehr klein, und man kann die übrigen Glieder der beyden Reihen weglassen, so daß die Werthe von z für X′ und $X'' = Z + \omega Z'$ und $Z + \omega' Z'$, und also die Fehler die wir Δ und Δ′ nennen wollen $= \omega Z'$ und $\omega' Z'$ werden. Es wird also $\Delta : \Delta' = \omega : \omega'$, und $\Delta : (\Delta' - \Delta) = \omega : (\omega' - \omega)$: aber $\omega' - \omega = (X + \omega') - (X + \omega) = X'' - X'$, also $\Delta : (\Delta' - \Delta) = \omega : (X'' - X')$, und folglich $\omega = \frac{\Delta (X'' - X')}{\Delta' - \Delta}$, die verlangte Abweichung des wahren Werthes von x von dem beynahe richtigen X′.

3) Wollte man noch die Glieder $\omega^2 Z''$ und $\omega'^2 Z''$ jener Reihen beybehalten, so müßte man

noch einen hypothetischen Werth X''' wählen, und dessen Fehler in dem Werthe von z berechnen; dies wird in der folgenden allgemeinern Untersuchung geschehen.

§. 7.

Es seyen v und w zwey Functionen von den veränderlichen Größen x und y, und von denselben die Werthe $v = V$, $w = W$, für die dadurch bestimmten, aber unbekannten Werthe $x = X$, und $y = Y$ gegeben. Wir wollen setzen, man habe für x und y die Werthe X' und Y' gefunden, die den gesuchten nahe kommen, so findet man ihre Abweichungen von den wahren Werthen auf folgende Weise:

1) Es sey $X' = X + i$, $Y' = Y + h$, so ist der Werth von v, für X' und $Y' = V + i\left(\frac{dV}{dx}\right)$

$$+ \frac{i^2}{1.2}\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right) \ldots + h\left(\frac{dV}{dy}\right).$$

$$+ \frac{h^2}{1.2}\left(\frac{d^2V}{dy^2}\right) + \ldots,$$

wenn $\left(\frac{dV}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2V}{d^2x}\right)$, $\left(\frac{dV}{dy}\right)$ . . die Werthe der partiellen Differenziale von v für $x = X$ und $y = Y$ bedeuten. In der Voraussetzung also, daß i und h sehr klein sind, kann man die übrigen Glieder außer dem zweyten von jeder dieser Reihen wegwerfen, und dann ist für X' und Y'

der Werth von $v = V + i\left(\frac{dV}{dx}\right) + h\left(\frac{dV}{dy}\right)$, also der Fehler, welcher m heißen mag,

$$= i\left(\frac{dV}{dx}\right) + h\left(\frac{dV}{dy}\right).$$

2) Man variire jetzt X' um einen kleinen Theil δ, indem man Y' unverändert läßt, so wird für diese beyden Werthe von x und y der Werth von $v = V + (i + \delta)\left(\frac{dV}{dx}\right) + h\left(\frac{dV}{dy}\right)$, und der Fehler, welcher nun entsteht, und den wir m' nennen wollen, wird $= (i + \delta)\left(\frac{dV}{dx}\right) + h\left(\frac{dV}{dy}\right)$.

3) Endlich lasse man X' ungeändert, und vermehre Y' um ω, so wird nun der Fehler $m'' = i\left(\frac{dV}{dx}\right) + (h + \omega)\left(\frac{dV}{dy}\right)$ also: $m' - m = \delta\left(\frac{dV}{dx}\right)$, und $m'' - m = \omega\left(\frac{dV}{dy}\right)$, folglich $i\left(\frac{dV}{dx}\right) = (m' - m)\frac{i}{\delta}$, und $h\left(\frac{dV}{dy}\right) = (m'' - m)\frac{h}{\omega}$, und wir haben: $m = i\left(\frac{dV}{dx}\right) + h\left(\frac{dV}{dy}\right) = m' - m)\frac{i}{\delta} + (m'' - m)\frac{h}{\omega}$ oder setzen wir $\frac{i}{\delta} = p$, $\frac{h}{\omega} = q$, so wird $m = p(m' - m) + q(m'' - m)$.

4) Eben so erhält man in Betreff der andern Function w, wenn man dieselben hypothetischen Werthe für x und y gebraucht, und die Fehler hier n, n', n'' heißen, die ähnliche Gleichung: $p(n'-n) + q(n''-n) = n$, welche mit der vorigen verbunden: $p = \frac{n(m''-m) - m(n''-n)}{(n'-n)(m''-m) - (m'-m)(n''-n)}$,

und $q = \frac{m(n'-n) - n(m'-m)}{(n'-n)(m''-m) - (m'-m)(n''-n)}$

giebt.

5) Wollte man die Correction noch schärfer bestimmen, so dürfte man nur das aus den Reihen noch mitnehmen, was i und h in der zweyten Dimension enthält; dann aber würden noch zwey hypothetische Werthe für x und y erfordert, um alle vorkommenden Differenziale zu eliminiren. Jedoch schafft dies wenig Nutzen, weil die daraus entspringenden Formeln für p und q zu zusammengesetzt sind; man thut also besser mit den nach n 4 verbesserten X′ und Y′ den Calcul von neuem anzustellen.

Erster Theil.

Von
der Bewegung
der
Planeten und Kometen.

Schickliche Wahl der Einheit der Kräfte in der Astronomie.

§. 1.

Bey Berechnung der Wirkungen, welche durch Kräfte hervorgebracht werden, muß, wie bey Größen jeder andern Art, irgend eine Kraft den andern zum Maaße dienen. Diese Einheit der Kräfte muß an sich bestimmt seyn, und darf nicht von willkührlichen Voraussetzungen abhängen, wie z. B. die Schwere unter dem Aequator, die keinen veränderlichen Annahmen unterworfen ist, daher sie auch immer bey Bewegungen auf unserer Erde zu diesem Zwecke gebraucht wird. In der Astronomie ist man nicht gerade an dieses Maaß gebunden; es bieten sich uns bey der Bewegung der Himmelskörper andere dar, die, wie wir sehen werden, eben so bestimmt, und für Untersuchungen der Art passender sind.

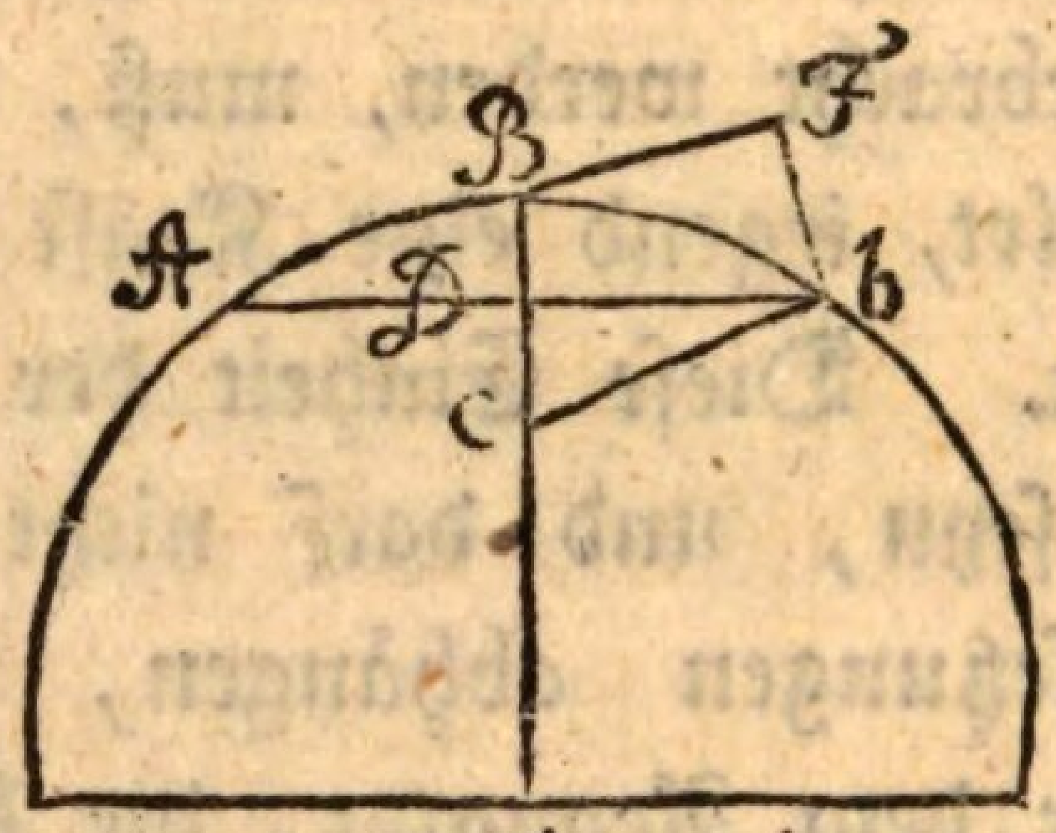
§. 2.

Außerdem, daß die Kraft, welche als Einheit gebraucht werden soll, unveränderlich seyn muß, wird auch erfordert, daß ihre Wirkung bekannt sey,

oder bestimmter: daß man den Weg genau anzugeben wisse, durch den sie die Körper in einem unendlich kleinen Zeittheile dt unmittelbar treibt. Alsdann läßt sich jede andere Kraft mit ihr vergleichen, indem sich beschleunigende Kräfte wie die Räume verhalten durch die sie die Körper in dt führen. (Kästner höhere Mechanik Cap. III. §. 65).

§. 3.

Aufgabe.



Ein Körper bewegt sich um den Mittelpunct C eines andern Körpers, von dem er angezogen wird, im Kreise, und seine Geschwindigkeit in irgend einem Punkte A seiner Bahn ist gegeben, man sucht den Raum durch den ihn die Zugkraft zum Mittelpunkte treibt, während er das Element AB zurücklegt.

Auflösung. 1) Der Körper würde im folgenden Zeittheilchen dt nach der Richtung AB, durch BF — AB gehen, wenn ihn die Centralkraft nicht nöthigte, von dieser Richtung abzulenken, und das folgende Element Bb zu beschreiben.

2) Man ziehe BC, und ergänze das Parallelogram BFbc, so ist Bc der Weg, durch den ihn die Centralkraft in dt getrieben hat: denn aus dieser Bewegung, und der n 1, entsteht die mittlere durch Bb.

3) Die Sehne Ab werde vom Halbmesser BC in D geschnitten, so ist wegen der congruenten Dreyecke ABD und bDC, BD = Dc, folglich Bc = 2BD, oder der gesuchte Raum doppelt so groß als der Quersinus des Bogens AB.

4) Nennt man also die Geschwindigkeit des Körpers, oder den Weg den er in der Zeit = 1 frey zurücklegen würde, c, und den Halbmesser der Bahn r, so ist AB = cdt, und $BD = \frac{AB^2}{2BC}$ $= \frac{c^2 dt^2}{2r}$, folglich Bc, der Raum der von der Kraft herrührt $= \frac{c^2 dt^2}{r}$.

§. 4.

Da die Zugkraft von der Entfernung abhängt, so ist sie in allen Punkten des Kreises gleich groß, folglich auch die Geschwindigkeit des Körpers, wie aus der eben gefundenen Formel $\frac{c^2 dt^2}{r}$, für die Wirkung der Centralkraft, erhellet. Man denke sich

daher einen Planeten, der sich im Kreise um die Sonne bewegt, und setze den Radius seiner Bahn $= 1$, seine Umlaufszeit $= T$, so ist seine Geschwindigkeit $= \frac{2\pi}{T}$ und folglich der Raum durch den die Centralkraft ihn in jedem Zeitelemente dt zur Sonne treibt, $= \frac{4\pi^2 dt^2}{T^2}$.

§. 5.

Nimmt man diese Kraft zur Einheit an, und nennt die Zeit $= 1$ in der der Planet den Raum $= 1$, oder den Bogen 57°, 29578 seiner Bahn zurücklegt, so wird $T = 2\pi$, also der Raum, durch den in jedem dt die Kraft ihn führt, $= dt^2$, mithin der, durch welchen jede andere Kraft p einen Körper in dt treibt, $= p dt^2$. Diese einfache Formel rührt bloß von der Wahl der Zeiteinheit her, auf die man beym Gebrauche der Formel, wenn von der Zeit die Rede ist, wohl Rücksicht nehmen muß.

§. 6.

In der Folge wird gezeigt werden, daß die Erde genau dieselbe Umlaufszeit haben würde, wenn sie sich in mittlerer Entfernung im Kreise um die Sonne bewegte. Alsdann kann man die mittlere Kraft, womit die Erde von der Sonne in ihrer Bahn gehalten wird, als Einheit festsetzen, wodurch

die Zeiteinheit, in Tagen ausgedruckt, $= \frac{365^d 25634}{2\pi}$ $= 58^d,132325$ wird, wofern man zugleich die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne als Einheit des Weges annimmt.

§. 7.

Gesetzt aber, die Zeiteinheit ist nicht willkührlich, wie z. B. in dem Falle, wenn vom Sekundenpendel in der Rechnung Gebrauch gemacht wird, so darf man sich der vorigen Festsetzungen nicht mehr bedienen, sondern muß unsere Schwere beybehalten, welche dann auch bey dergleichen Rechnungen zur Einheit passender ist.

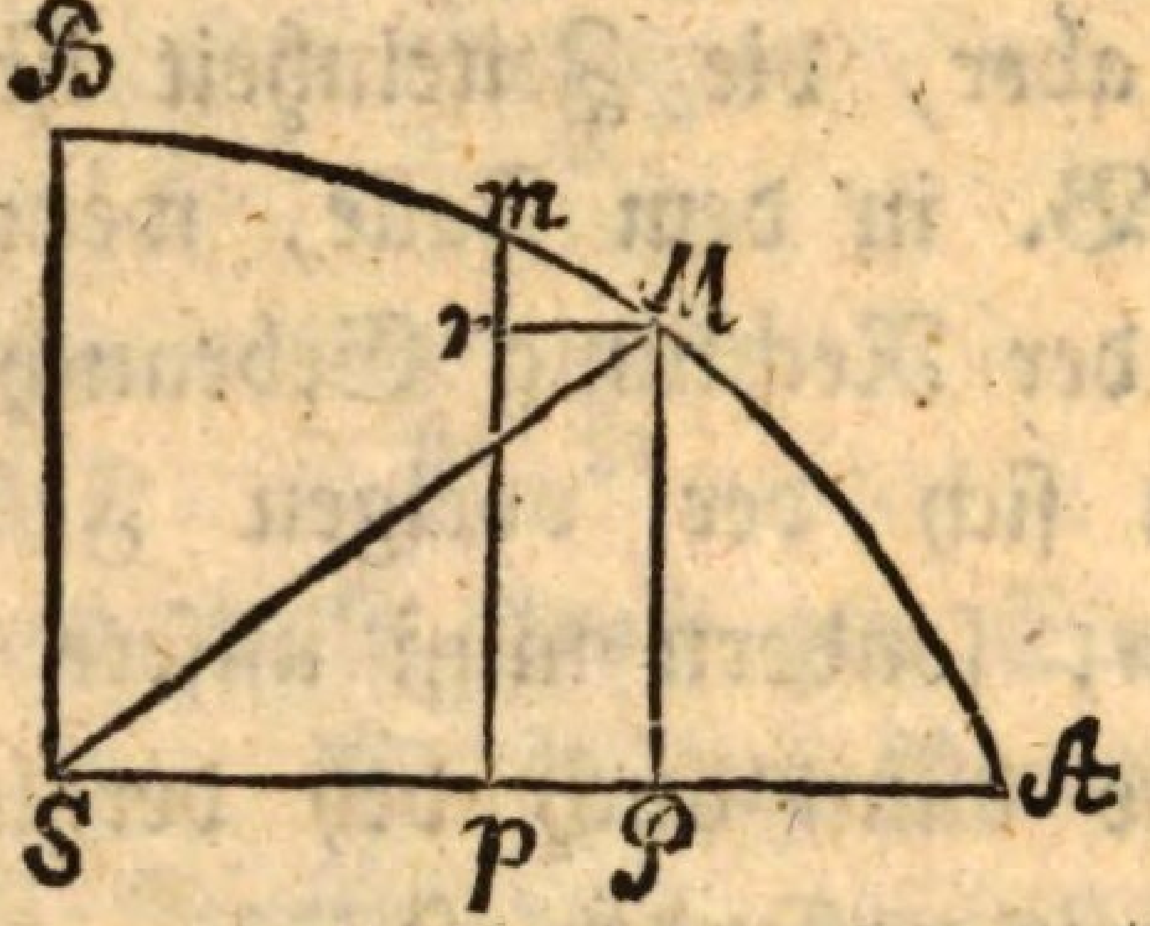
Allgemeine Eigenschaften der Bahnen überhaupt.

§. 8.

Wenn man alle fremden Kräfte, die außer der Centralkraft der Sonne auf einen Körper, der sich um sie bewegt, würken könnten, bey Seite setzt, so liegt seine ganze Bahn in einer Ebene. Indem nemlich der Körper ein Element seiner Bahn beschreibt, liegt die Richtung der Kraft, womit die Sonne ihn anzieht, in einer Ebene durch dies Element und die Sonne gelegt, folglich auch der Raum, durch den im folgenden Zeitmomente dt diese Kraft ihn treibt. Ohne sie würde er nach der Richtung des vorigen Elementes fortgegangen, und also in

jener Ebene geblieben seyn, daher liegt auch der zusammengesetzte Weg, oder das folgende Element seiner Bahn noch in derselben Ebene. Da auf die Weise jedes Element mit dem vorigen in einerley Ebene liegt, so liegen sie alle zusammen in dieser.

§. 9.



Es sey demnach in der Ebene der beyden Axen SA und SB, die sich in S, dem Mittelpunkte der Sonne senkrecht durchschneiden, AMB die Bahn des Weltkörpers. Man ziehe aus M, wo er sich im gegenwärtigen Zeitpunkte befindet, MP mit SB parallel, und setze als Coordinaten der Bahn AP $= u$, PM $= y$; außerdem sey AS $= b$, der Radius Vector SM $= r$, und der Winkel MSA $= \varphi$. so gelangt man durch folgende Betrachtungen zu den Fundamental-Gleichungen zwischen diesen Größen:

1) Es sey Mm das in dt beschriebene Element, so sind Mr und rm die Aenderungen der Coordinaten während der Körper dies Element zurücklegt, und man kann sich vorstellen, seine Bewegung

wegung durch Mm sey aus diesen beyden zusammengesetzt, oder er bewege sich in diesem dt zugleich durch Mr = du, und durch rm = dy.

2) Im folgenden dt würde er nun, wenn er dem vorigen Laufe frey folgen könnte, nach den Richtungen der Coordinaten wieder die Wege du und dy machen; er macht aber würklich du′ = du + d²u, und dy′ = dy + d²y nach diesen Richtungen, also müssen die Unterschiede d²x und d²y von der Kraft der Sonne herrühren, die in m aufs neue auf ihn würkt.

3) Diese Kraft ist nun $= \frac{1}{r^2}$, indem sich die Zugkräfte bey gleichen anziehenden Massen verkehrt wie die Quadrate der Entfernungen verhalten, und wir die Kraft, womit die Sonne in der Entfernung 1 anzieht, = 1 gesetzt haben, (5) folglich ist der Raum, der von dieser Kraft herrührt, $= \frac{dt}{r^2}$ (ebendas.) und liegt in der Linie mS.

4) Da wir aber die relative Bewegung des Planeten in Bezug auf die Sonne hier betrachten, so ist noch eine Ursache vorhanden, warum du und dy im folgenden dt in du′ und dy′ sich umändern. Der Planet zieht nemlich gegenseitig auch die Sonne an, und heißt m seine Masse, so ist die Kraft, womit dies geschieht, $= \frac{m}{r^2}$, und der

Weg, um den durch diese die Sonne dem Planeten näher rückt, $= \frac{m dt^2}{r^2}$. Da nun hier der Ort der Sonne als unbeweglich betrachtet wird, und nue zu wissen nöthig ist, um wie viel beyder Entfernung sich ändert, so kann man die Bewegung der Sonne auf den Planeten übertragen, und der ganze Weg des Planeten gegen die Sonne, oder nach mS wird dadurch $= \frac{(1+m) dt^2}{r^2}$.

5) Auch dieser läßt sich ansehen, als sey er aus zweyen den Axen SA und SB parallelen Wegen zusammengesetzt, und man erhält durch Zerlegung desselben nach diesen Richtungen die Räume: $\frac{(1+m) dt^2}{r^2} \cdot \text{Cos}\,\varphi$ und $- \frac{(1+m) dt^2}{r^2} \cdot \text{Sin}\,\varphi$.

6) Also ist (n 2) $d^2u = \frac{(1+m) dt^2}{r^2} \cdot \text{Cos}\,\varphi$, und $d^2y = - \frac{(1+m) dt^2}{r^2} \cdot \text{Sin}\,\varphi$.

7) Man rechne jetzt die Abscissen vom Mittelpunkte aus, und setze $SP = x$, so wird $u = AP = b - x$, also $du = - dx$, $d^2u = - d^2x$ und folglich $\frac{(1+m) dt^2}{r^2} \cdot \text{Cos}\,\varphi = - d^2x$, oder: $d^2x = \frac{(1+m) dt^2}{r^2} \cdot \text{Cos}\,\varphi = 0$, so wie

$d^2y + \frac{(1+m)dt^2}{r^2} = 0$, welches die beyden verlangten Differenzial-Gleichungen der Bahn sind.

§. 10.

Diese Gleichungen lassen sich auf folgende Art verbinden:

1) Da $r\,\mathrm{Cos}\,\varphi = x$, oder $\mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{x}{r}$, und $\sin\varphi = \frac{y}{r}$ ist, so hat man auch

$$d^2x + \frac{(1+m)xdt^2}{r^3} = 0, \text{ und}$$

$$d^2y + \frac{(1+m)ydt^2}{r^3} = 0 .$$

2) Erstere durch y, letztere durch x multiplicirt, und dann beyde von einander abgezogen, erhält man: $\frac{yd^2x}{dt^2} - \frac{xd^2y}{dt^2} = 0$, und diese Gleichung integrirt, giebt: $\frac{xdy - ydx}{dt} = h$.

3) Ferner wird $\frac{dxd^2x}{dt^2} + \frac{(1+m)xdx}{r^3} = 0$

und $\frac{dyd^2y}{dt^2} + \frac{(1+m)ydy}{r^3} = 0$

---

also $\frac{dxd^2x + dyd^2y}{dt^2} + \frac{(1+m)(xdx+ydy)}{r^3} = 0.$

Aber weil $r^2 = x^2 + y^2$ ist, so wird $rdr = xdx + ydy$, folglich $\frac{dxd^2x + dyd^2y}{dt^2} + \frac{(1+m)dr}{r^2} = 0$, woraus man durch Integrirung

$$\frac{dx^2 + dy^2}{2dt^2} - \frac{1+m}{r} = k \text{ erhält.}$$

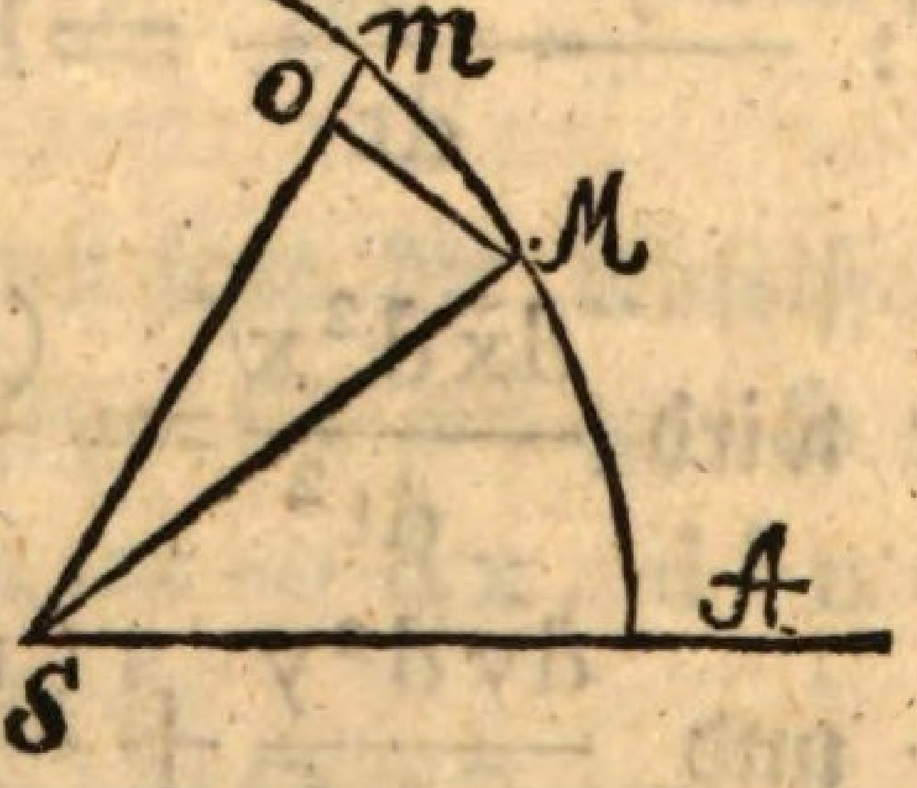
§. 11.

Die beyden Gleichungen des vorigen §, enthalten bloß Differenziale vom ersten Grade. Will man aus ihnen x und y wegschaffen, so hat man $x = r\,\mathrm{Cos}\,\varphi$, $y = r\,\mathrm{Sin}\,\varphi$, und daraus $dx = dr\,\mathrm{Cos}\,\varphi - r\,\mathrm{Sin}\,\varphi\, d\varphi$ $dy = dr\,\mathrm{Sin}\,\varphi + r\,\mathrm{Cos}\,\varphi\, d\varphi$. Dies giebt nun

$$xdy = r\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi\, dr + r^2\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2\, d\varphi$$
$$ydx = r\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi\, dr - r^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2\, d\varphi$$

also wird $xdy - ydx = r^2 d\varphi$, folglich haben wir (9, 1) $h = \frac{xdy - ydx}{dt} = \frac{r^2 d\varphi}{dt}$.

Beschreibt man



mit SM das Kreiselement Mo so macht dies mit SM und So rechte Winkel, also ist das Element SMm der Fläche der Bahn

$$=\frac{Sm.Mo}{2}=\frac{(dr+d^2r)rd\varphi}{2}=\frac{r^2d\varphi}{2}$$

$+\frac{rdrd\varphi}{2}$, wovon der letzte Theil wegen der höhern Dimension der unendlich kleinen Größen wegfällt. Nennen wir also Z den Raum ASM, so ist $dZ=\frac{r^2d\varphi}{2}$, und daher $\frac{dZ}{dt}=\frac{r^2d\varphi}{2dt}=\frac{1}{2}h$, welches integrirt, $Z=\int\frac{1}{2}hdt=\frac{1}{2}ht$ giebt, wo keine Constante hinzukommt, weil für $t=0$, $Z=0$ ist. Man sieht in dieser Formel das bekannte Gesetz der Trajektorien: daß die Räume sich stets verhalten wie die Zeiten, in denen sie beschrieben sind.

§. 12.

Jetzt kann man aus der zweyten Gleichung (§. 10) außer x und y auch t wegschaffen, und so eine Gleichung für die Bahn zwischen r und φ finden. Man erhält nemlich:

1) Aus §. 11

$$dx^2 = \text{Cos}\,\varphi^2 dr^2 - 2r\,\text{Sin}\,\varphi\,\text{Cos}\,\varphi\, drd\varphi + r^2\,\text{Sin}\,\varphi^2 d\varphi^2$$

$$dy^2 = \text{Sin}\,\varphi^2 dr^2 + 2r\,\text{Sin}\,\varphi\,\text{Cos}\,\varphi\, drd\varphi + r^2\,\text{Cos}\,\varphi^2 d\varphi^2,$$

also $dx^2+dy^2=dr^2+r^2d\varphi^2$, und es wird folglich:

$\frac{dr^2+r^2d\varphi^2}{2dt^2}-\frac{1+m}{r}-k=0$. Nun ist (11)

$$dt = \frac{r^2 d\varphi}{h},$$ dies substituirt, giebt

$$\frac{h^2(dr^2 + r^2 d\varphi^2)}{2r^4 d\varphi^2} + \frac{1+m}{r} - k = 0,$$ oder:

$$\frac{h^2 dr^2}{r^4 d\varphi^2} + \frac{h^2}{r^2} - \frac{2(1+m)}{r} - 2k = 0.$$

2) Daraus erhalten wir

$$\frac{dr^2}{d\varphi^2} = \left(2k + \frac{2(1+m)}{r} - \frac{h^2}{r^2}\right) \cdot \frac{r^4}{h^2},$$ und

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{h}{r^2 \sqrt{\left(2k + \frac{2(1+m)}{r} - \frac{h^2}{r^2}\right)}}.$$

3) Wird nun $r = \frac{1}{u}$ gesetzt, so hat man

$$dr = -\frac{du}{u^2},$$ also $$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{u^2 d\varphi}{du}$$

$$= \frac{u^2 h}{\sqrt{(2k + 2u(1+m) - h^2u^2)}},$$

also $$d\varphi = \frac{-hdu}{\sqrt{(2k + 2u(1+m) - h^2u^2)}}.$$

Um diese Differenzialformel zu integriren, setze man $u = w + i$, so daß

$$d\varphi = \frac{-hdw}{\sqrt{(2k + 2i(1+m) - h^2i^2 + 2w(1+m - h^2i) - h^2w^2)}}$$

wird. Da i willkührlich ist, so sey $1 + m - h^2 i = 0$,

woraus $i = \frac{1+m}{h^2}$ wird; dies giebt ferner $2i(1+m) - h^2 i^2 = \frac{1+m^2}{h^2}$. Setzt man nun $2k + \frac{(1+m)^2}{h^2} = h^2 f^2$, so wird $d\phi = \frac{-dw}{\sqrt{(f^2 - w^2)}}$, und durch Integration $A + \phi = \text{arc Cos}\,\frac{w}{f}$, folglich $\frac{w}{f} = \text{Cos}(A + \phi)$. Substituirt man endlich $\sqrt{\frac{2k}{h^2} + \frac{(1+m)^2}{h^4}}$ für f, und $u - i = u - \frac{1+m}{h^2}$ für w, so erhält man:

$$u - \frac{1+m}{h^2} = \text{Cos}(A+\phi) \cdot \sqrt{\left(\frac{2k}{h^2} + \frac{(1+m)^2}{h^4}\right)},$$

und daraus wird $\frac{1}{r} = \frac{1+m}{h^2} + \text{Cos}(A+\phi) \cdot \sqrt{\left(\frac{2k}{h^2} + \frac{(1+m)^2}{h^4}\right)}$, oder

$$r = \frac{h^2}{1 + m + \text{Cos}(A+\phi) \cdot \sqrt{(2kh^2 + (1+m^2)}}.$$

4) Dies ist offenbar eine Gleichung für den Kegelschnitt zwischen dem Radius Vector und dem dazu gehörigen Winkel. Denn nennt man a die halbe große Axe in einem Kegelschnitte, e die Eccentricität, v den Winkel, von dem Theile der Axe angerechnet, wo der Brennpunct liegt, aus dem an r zieht, so hat man bekanntlich:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \operatorname{Cos} v} \text{ oder } \frac{1}{r} = \frac{1}{a(1-e^2)} + \frac{e \operatorname{Cos} v}{a(1-e^2)}.$$

Dies mit obiger Formel für $\frac{1}{r}$ verglichen giebt

$$\frac{1}{a(1-e^2)} = \frac{1+m}{h^2}, \frac{e}{a(1-e^2)}$$

$$= \frac{\sqrt{[2kh^2 + (1+m)^2]}}{h^2}\ v = A + \varphi,$$

$$\text{also } e = \frac{\sqrt{[2kh^2 + (1+m)^2]}}{1+m},$$

$$1 - e^2 = -\frac{2kh^2}{(1+m)^2},\ a = \frac{h^2}{(1-e^2)(1+m)}$$

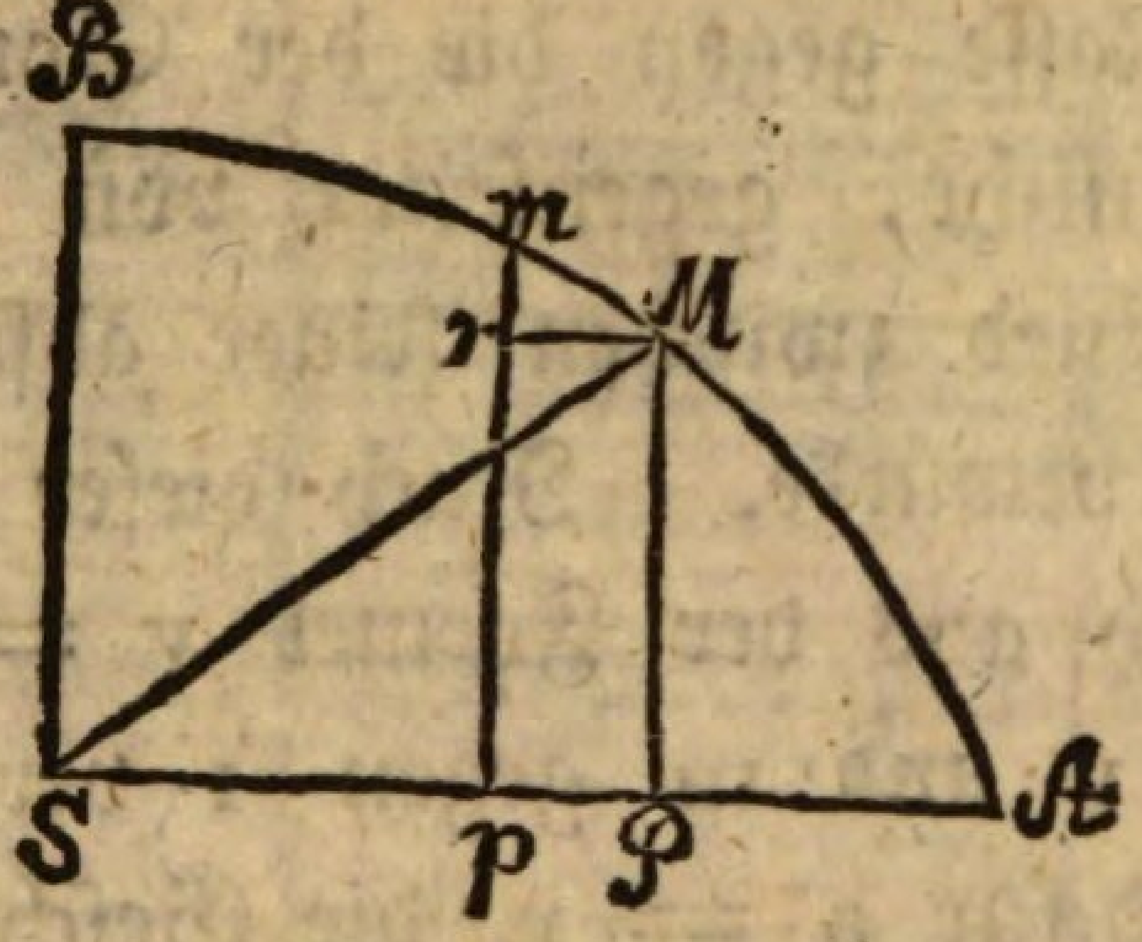
$= -\frac{(1+m)}{2k}$. Wir könnten also die Elemente der Bahn bestimmen, wenn wir die durch die verschiedenen Integrationen erhaltenen Constanten auf andere Weise finden könnten. Dazu bieten sich aber keine Mittel dar, und man muß vielmehr umgekehrt durch Beobachtungen a und e zu finden suchen, da man nunmehr weiß, daß jede Planeten- oder Kometenbahn die Figur eines Kegelschnittes hat.

5) Es sey demnach a und e für eine Bahn bekannt, so wird aus jenen Formeln gegenseitig $k = -\frac{1+m}{2a}$, $h^2 = -\frac{(1-e^2)(1+m)^2}{2k}$ $= a(1-e^2)(1+m)$, also $h = \sqrt{\cdot}[a(1-e^2)(1+m)]$, und nimmt man die Axe SA in der großen Axe der Bahn an, so wird $A = 0$, also

$\varphi = v$. Diesen Winkel nennt man bekanntlich die wahre Anomalie, die hier vom Perihelium A angerechnet wird, da für $v = 0$, $r = SA = a(1 - e)$ ist.

§. 13.

Aufgabe.



Aus den bekannten Elementen der Bahn die Geschwindigkeit in jeder Stelle derselben zu bestimmen.

Auflösung. 1) Es sey die Geschwindigkeit des Körpers in $M = v$, so ist $v = \frac{Mm}{dt}$, also $v^2 = \frac{Mm^2}{dt^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}$. Nun ist aus §. 10. $2 : \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = 2k + \frac{2(1+m)}{r}$, also wird $v^2 = \frac{2(1+m)}{r} - \frac{(1+m)}{a} = (1+m)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$. Um zu sehen, welche Geschwindigkeit als Einheit zum Grunde liege, gehe man auf §. 6 zurück. Wir nah-

men daselbst einen Planeten an, der sich in der Entfernung 1 im Kreise um die Sonne bewegt; dessen Geschwindigkeit ist also unveränderlich, und $= 1$, weil wir die Zeit, wo er den Raum 1 beschreibt, als Einheit angenommen haben.

2) Da wir bei jenem Planeten die Sonne als festen Punct betrachteten, so ist dazu erforderlich, daß seine Masse gegen die der Sonne verschwinde, damit diese nicht, gegenseitig von ihm angezogen, einen Unterschied zwischen seiner absoluten und relativen Bahn bewürke. Nach dieser Erinnerung findet man auch aus der Formel $v = 1$, wenn man $a = r = 1$ und m gegen 1 verschwindend setzt. Dagegen wird für $a = r$, die Geschwindigkeit in jeder andern Kreisbahn, deren Halbmesser r ist, $= \sqrt{\frac{(1+m)}{r}}$, also verhalten sich in verschiedenen Kreisbahnen die Geschwindigkeiten verkehrt, wie die Quadratwurzeln aus den Halbmessern, wenn man die Massen m entweder gleich setzt, oder als unbedeutend gegen 1, wegläßt.

4) Ist die Bahn eine Ellipse, welches in der Natur am häufigsten, und vielleicht allein nur statt findet, so hat man, weil a dann allemal positiv ist, $v = \sqrt{(1+m) \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$, wo man für r, wenn es nöthig wäre, den Werth in z ausgedrückt,

substituiren könnte. Im Perihelium, wo $r = a(1 - e)$, wird $v = \sqrt{(1+m)} \cdot \sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}$ und im Aphelium wo $r = a(1+e)$, $v = \sqrt{(1+m)}\sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}$. Diese beyden Geschwindigkeiten verhalten sich also wie $1 + e : 1 - e$.

4) In der Parabel ist a unendlich, also daselbst $v = \sqrt{\frac{2}{r}} \cdot \sqrt{(1+m)}$, und in der Hyperbel, wo a negativ ist, $v = \sqrt{(1+m)} \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right)}$.

5) Was die Winkelgeschwindigkeit anbetrifft, so läßt sich diese aus §. 11 leicht herleiten. Da nemlich $r^2 d\varphi = h dt$, so wird:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{h}{r^2} = \sqrt{(1+m)} \frac{\sqrt{[a(1-e^2)]}}{r^2},$$ und diese verhält sich also in einer und derselben Bahn verkehrt, wie das Quadrat des Radius Vectors.

§. 14.

Aufgabe. Die Zeit zu bestimmen, die für eine gegebene Anomalie vom Perihelium an verflossen ist.

1) Wir hatten vorhin $dt = \frac{r^2 d\varphi}{h}$. Da nun

$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \operatorname{Cos}\varphi}$, so erhält man $dt = \frac{a^2(1-e^2)^2 d\varphi}{h(1+e \operatorname{Cos}\varphi)^2}$

$$= \frac{a^{\frac{3}{2}}(1-e^2)^{\frac{3}{2}} d\varphi}{\sqrt{(1+m)}.(1+e \operatorname{Cos}\varphi)^2},$$ und es wird

$$t + c = \frac{a^{\frac{3}{2}}.(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(1+m)}} . \int \frac{d\varphi}{(1+e \operatorname{Cos}\varphi)^2}.$$

2) Um $\frac{d\varphi}{(1+e \operatorname{Cos}\varphi)^2}$ zu integriren, setze man $k \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\pi$; differenziirt man dies, so hat man $\frac{k d\varphi}{2 \operatorname{Cos} \frac{1}{2}\varphi^2} = \frac{d\pi}{2 \operatorname{Cos} \frac{1}{2}\pi^2}$, also

$$d\varphi = \frac{d\pi \operatorname{Cos} \frac{1}{2}\varphi^2}{k \operatorname{Cos} \frac{1}{2}\pi^2} = \frac{k d\pi}{k^2(1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi^2)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\pi^2}$$

$$= \frac{k d\pi}{(k^2+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\pi^2)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\pi^2}$$

$$= \frac{k d\pi}{1+(k^2-1)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\pi^2}.$$

3) Ferner ist $1+e \operatorname{Cos}\varphi = 1+e(2 \operatorname{Cos}\frac{1}{2}\varphi^2 - 1) = 1 - e + 2e \operatorname{Cos}\frac{1}{2}\varphi^2$. Aber $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\varphi^2$

$$= \frac{1}{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi^2} = \frac{k^2}{k^2+\operatorname{tang}\frac{1}{2}\pi^2}$$

$$= \frac{k^2 \operatorname{Cos}\frac{1}{2}\pi^2}{1+(k^2-1)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\pi^2},$$ und folglich

$$1+e \operatorname{Cos}\varphi = 1 - e + \frac{2ek^2 \cos\frac{1}{2}\pi^2}{1+(k^2-1)\cos\frac{1}{2}\pi^2}$$

$$= \frac{1 - e + [(1+e)k^2 + e - 1] \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}\pi^2}{1 + (k^2 - 1) \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}\pi^2},$$

also wird $\frac{d\varphi}{(1 + e \operatorname{Cos}\varphi)^2}$

$$= \frac{(1 + (k^2 - 1) \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}\pi) k \, d\pi}{(1 - e + [(1+e) k^2 + e - 1] \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}\pi^2)^2}.$$

4) Hier kann man, weil k willkührlich ist, im Nenner $(1 + e) k^2 + e - 1 = 0$ setzen, wodurch $k = \surd \left(\frac{1 - e}{1 + e}\right)$ wird, und dadurch verwandelt sich das Differenzial in

$$\frac{\surd \left(\frac{1-e}{1+e}\right) \cdot \left(1 - \frac{2e}{e+1} \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}\pi^2\right) d\pi}{(1 - e)^2}.$$

Der Zähler vom letztern Bruche wird auch

$$= \frac{1 + e(1 - 2 \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}\pi^2)}{1 + e} = \frac{1 - e \operatorname{Cos}\pi}{1 + e},$$

und so erhält das Differenzial endlich die Form $\frac{(1 - e \operatorname{Cos}\pi) d\pi}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}$, wovon das Integral $\frac{\pi - e \operatorname{Sin}\pi}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}$ ist. Dies in dem Integrale (1) substituirt, giebt $t + c = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\surd(1 + m)} \cdot (\pi - e \operatorname{Sin}\pi)$, in welcher Formel also π, vermittelst der Gleichung $\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\pi = \surd \left(\frac{1 - e}{1 + e}\right) \cdot \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\varphi$, durch die wahre Anomalie bestimmt wird.

Da die Zeit von dem Augenblicke angerechnet wird, wo der Weltkörper sich im Perihelium befindet, so ist für $\varphi = 0$, $t = 0$, also da auch π in diesem Falle $= 0$ ist, so fällt c weg, und wir haben $t = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(1+m)}} \cdot (\pi - e \operatorname{Sin} \pi)$.

6) Man kann hier beyläufig bemerken, daß die sogenannte eccentrische Anomalie eben der Winkel sey, den wir hier π genannt haben, indem zwischen ihr und der wahren Anomalie eben die Gleichung statt findet.

§. 15.

Für $\varphi = 2\pi$, ist $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi = \operatorname{tang} \pi = 0$, also $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\pi = 0$, und folglich entweder $\frac{1}{2}\pi = 0$, oder $= \pi$, oder $= 2\pi$ u. s. f. Daß man hier $\frac{1}{2}\pi = \pi$ setzen müsse, und also die Umlaufszeit $= \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(1+m)}}$ sey, erhellet so: Es sey für $\varphi = 2\pi$ der Werth von $\frac{1}{2}\pi$, den man unter der unendlichen Menge möglicher Werthe zu wählen hat, $n\pi$ so wird die Umlaufszeit, weil n eine ganze Zahl, folglich $\operatorname{Sin} \pi = 0$ ist, $= \frac{2n\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(1+m)}}$. Dieser Ausdruck hängt nicht weiter von e ab, und muß also für einerley a einerley Werth haben, was e auch immer seyn mag. Man nehme also eine Kreisbahn an, deren Halbmesser $= a$ ist, so ist für $a = 1$

die Umlaufszeit $= 2\pi$. (§. 6.) Man setze auch in der allgemeinen Formel $a = 1$, und $m = 0$, (13.2) so wird $2n\pi = 2\pi$, und folglich ist allgemein die Umlaufszeit T in jeder Bahn $= \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(1+m)}}$.

§. 16.

Die Bahn mag also kreisförmig oder elliptisch seyn, so ist doch die Umlaufszeit für einerley a, d. i: für einerley mittlere Distanz von der Sonne dieselbe, und ein Planet also, der sich in mittlerer Distanz der Erde von der Sonne um letztere im Kreise bewegte, würde genau dieselbe Umlaufszeit haben. Setzen wir also den mittlern Halbmesser der Erdbahn $= 1$, so wäre die Umlaufszeit eines solchen Planeten, indem wir die Masse gegen 1 wegwerfen, $= 2\pi = 365^d 25634$, also die Zeiteinheit $= \frac{365^d 25634}{2\pi} = 58^d 132325$. Da wir in der Folge bey den Kometen immer den mittlern Halbmesser der Erdbahn als Einheit annehmen werden, so wird dieser gefundene Zeitraum stets für die Zeiteinheit gebraucht werden.

§. 17.

Es sey für die halbe Axe a', und die Masse des Körpers m', die Umlaufszeit $= T'$, so ist

$$T' = \frac{2\pi a'^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(1+m')}}, \text{ also } T : T' = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(1+m)}} : \frac{a'^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(1+m')}},$$

und vernachläßigen wir die Massen m, m', als unbedeutend gegen die der Sonne, so wird $T : T' = a^{\frac{3}{2}} : a'^{\frac{3}{2}}$, oder $T^2 : T'^2 = a^3 : a'^3$ oder die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich, wie die Cuben der mittlern Entfernungen der Planeten von der Sonne, welches das bekannte Keplerische Gesetz ist.

§. 18.

Aufgabe. Den Radius Vector und die Geschwindigkeit des Körpers in seiner Bahn durch die eccentrische Anomalie zu bestimmen.

Auflösung. 1) Aus 14 . 3 hat man

$$1 + e \operatorname{Cos} \varphi = \frac{1 - e}{1 + (k^2 - 1) \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2} \pi^2}$$

$$= \frac{1 - e}{1 - \frac{2e}{1 + e} \operatorname{Cos} \frac{1}{2} \pi^2} = \frac{1 - e^2}{1 + e(1 - 2 \operatorname{Cos} \frac{1}{2} \pi^2}$$

$$= \frac{1 - e^2}{1 - e \operatorname{Cos} \pi}.$$ Setzt man dies in die Gleichung

$r = \dfrac{a(1 - e^2)}{1 + e \operatorname{Cos} \varphi}$, so wird $r = a(1 - e \operatorname{Cos} \pi)$.

2) Es war $v = (1 + m)\left(\dfrac{2}{r} - \dfrac{1}{a}\right)$, substituirt man also für r den gefundenen Ausdruck, so wird

$$v^2 = \left(\frac{1 + m}{a}\right)\left(\frac{2}{1 - e \operatorname{Cos} \pi} - 1\right)$$

$$= \left(\frac{1 + m}{a}\right)\left(\frac{1 + e \operatorname{Cos} \pi}{1 - e \operatorname{Cos} \pi}\right).$$

§. 19.

§. 19.

Aufgabe. Den Radius Vector durch die mittlere Anomalie oder Zeit vermittelst einer Reihe auszudrücken.

Auflösung. 1) Wenn man die Gleichung

$$t = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(1+m)}} (\pi - e \operatorname{Sin} \pi)$$ oder besser noch, indem man $\frac{t\sqrt{(1+m)}}{a^{\frac{3}{2}}} = u$ setzt, die Gleichung $u = \pi - e \operatorname{Sin} \pi$ mit der Gleichung $y = x - z$. Fx vergleicht (II. 4), so wird $y = u$, $x = \pi$, $Fx = \operatorname{Sin} \pi$; also bedeutet F hier Sinusfunktion, und endlich ist $z = e$. Ferner sey $f\pi = \operatorname{Cos} \pi$, so hat man, vermöge der daselbst angegebenen Formel, folgende Reihe:

$$\operatorname{Cos} \pi = \operatorname{Cos} u + e \operatorname{Sin} u \,.\, \frac{d \operatorname{Cos} u}{du}$$

$$+ \frac{e^2 d\left(\operatorname{Sin} u^2 \frac{d \operatorname{Cos} u}{du}\right)}{1 \,.\, 2\, du} + \ldots.$$

$$= \operatorname{Cos} u - e \operatorname{Sin} u^2 - \frac{e^2}{1 \,.\, 2} \frac{d \operatorname{Sin} u^3}{du}$$

$$- \frac{e^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \frac{d^2 \operatorname{Sin} u^4}{du^2} - \ldots,$$

oder $\operatorname{Cos} \pi = \operatorname{Cos} u - e \operatorname{Sin} u^2 - \frac{3}{2} e^2 \operatorname{Sin} u^2 \operatorname{Cos} u$

$$- 2 e^3 \operatorname{Sin} u^2 \operatorname{Cos} u^2 + \frac{2}{3} e^3 \operatorname{Sin} u^2$$

$$- \frac{5}{2} e^4 \operatorname{Sin} u^2 \operatorname{Cos} u^3 + \frac{65}{24} e^4 \operatorname{Sin} u^4 \operatorname{Cos} u \ldots$$

2) Um die trigonometrischen Ausdrücke, welche hier vorkommen, auf Sinus und Cosinus vielfacher Bogen von u zurückzuführen, hat man einmal für die Potenzen von Sin u und Cos u folgende Formeln:

$\mathrm{Sin}\, u^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \mathrm{Cos}\, u.$

$\mathrm{Sin}\, u^3 = \frac{3}{4} \mathrm{Sin}\, u - \frac{1}{4} \mathrm{Sin}\, 3\, u.$

$\mathrm{Sin}\, u^4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \mathrm{Cos}\, 2\, u + \frac{1}{8} \mathrm{Cos}\, 4\, u.$

$\mathrm{Sin}\, u^5 = \frac{5}{16} \mathrm{Sin}\, u - \frac{5}{16} \mathrm{Sin}\, 3\, u + \frac{1}{16} \mathrm{Sin}\, 5\, u.$

u. s. f.

$\mathrm{Cos}\, u^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \mathrm{Cos}\, 2\, u.$

$\mathrm{Cos}\, u^3 = \frac{3}{4} \mathrm{Cos}\, u + \frac{1}{4} \mathrm{Cos}\, 3\, u.$

$\mathrm{Cos}\, u^4 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \mathrm{Cos}\, 2\, u + \frac{1}{8} \mathrm{Cos}\, 4\, u.$

$\mathrm{Cos}\, u^5 = \frac{5}{16} \mathrm{Cos}\, u + \frac{5}{16} \mathrm{Cos}\, 3\, u + \frac{1}{16} \mathrm{Cos}\, 5\, u.$

u. s. f.

und hat man nach diesen die Potenzen von Sin u und Cos u weggeschafft, so dienen alsdann folgende Formeln zur Entwickelung der noch übrig bleibenden Producte.

$$\mathrm{Sin}\, pu \,.\, \mathrm{Sin}\, qu = \frac{1}{2} \mathrm{Cos}\, (p - q)\, u - \frac{1}{2} \mathrm{Cos}\, (p + q)\, u.$$

$$\mathrm{Sin}\, pu \,.\, \mathrm{Cos}\, qu = \frac{1}{2} \mathrm{Sin}\, (p - q)\, u + \frac{1}{2} \mathrm{Sin}\, (p + q)\, u.$$

$$\mathrm{Cos}\, pu\ \mathrm{Cos}\, qu = \frac{1}{2} \mathrm{Cos} (p - q) u + \frac{1}{2} \mathrm{Cos} (p + q) u.$$

3) Vermittelst dieser Formeln findet man:

$\mathrm{Cos}\, \pi = -\frac{1}{2} e + (1 - \frac{3}{8} e^2 + \frac{5}{192} e^4)\, \mathrm{Cos}\, u + (\frac{1}{2} e - \frac{1}{3} e^3)\, \mathrm{Cos}\, 2\, u + (\frac{3}{8} e^2 - \frac{45}{128} e^4)\, \mathrm{Cos}\, 3\, u + \frac{1}{3} e^3\, \mathrm{Cos}\, 4\, u$ und daraus:

$1 - e\, \mathrm{Cos}\, \pi = 1 + \frac{1}{2} e^2 - (e - \frac{3}{8} e^3)\, \mathrm{Cos}\, u - (\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{3} e^4)\, \mathrm{Cos}\, 2\, u - \frac{3}{8} e^3\, \mathrm{Cos}\, 3\, u - \frac{1}{3}$

$e^4 \, Cos\, 4\, u$ — . . , welche Reihe durch a multiplicirt, den Werth für r giebt.

4) Es bleibt noch übrig zu zeigen, daß in dieser Formel u, die mittlere Anomalie sey. Es heiße T die Umlaufszeit des Weltkörpers, so ist

$$T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(1+m)}},$$ also $$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(1+m)}} = \frac{T}{2\pi},$$ oder

$$\frac{\sqrt{(1+m)}}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi}{T}.$$ Wird dies in dem Ausdrucke

für u substituirt, so bekommt man $u = \frac{2\pi t}{T}$ oder

$T : t = 2\pi : u$, welches die bekannte Proportion für die mittlere Anomalie ist.

§. 20.

Die im vorigen § gefundene Reihe für r, so wie die, welche wir ferner für die wahre Anomalie suchen werden, ist allein nur für Planeten-Bahnen eingerichtet, bey denen e, oder das Verhältniß der Eccentricität zur halben großen Axe in der Regel so gering ist, daß man die Glieder, welche höhere Potenzen von ihm als die dritte enthalten, weglassen kann. So ist bey der Bahn unserer Erde, $e = 0{,}0168$, also $e^4 = 0{,}000000079$, dessen Weglassung selbst bey den genauesten Rechnungen keinen Fehler mehr verursachen kann; und der Winkel dem dies e^4 als Bogen für den Halbmesser 1 zugehört, $= 0'',016$; ebenfalls so klein, daß er al-

lemal weggelassen werden kann. Da jedoch nicht alle Planeten-Bahnen eine so kleine Eccentricität haben, als die Erde, so kann man in den Formeln e^4 im Allgemeinen beybehalten.

§. 21.

Aufgabe. Die wahre Anomalie durch die mittlere vermittelst einer Reihe auszudrücken.

Auflösung. 1) Da $r^2 d\varphi = h dt = dt \surd(1+m) \surd(a(1-e^2))$, und aus §. 19, $dt = \frac{a^{\frac{3}{2}} du}{\surd(1+m)}$ ist, so wird auch $r^2 d\varphi = a^2 du$. $\surd(1-e^2)$, und folglich: $d\varphi = \frac{a^2 \surd(1-e^2 du}{r^2}$.

2) Aber $u = \pi - e \operatorname{Sin} \pi$ (ebendas.), also $du = d\pi (1 - e \operatorname{Cos} \pi)$, und außerdem $r = a (1 - e \operatorname{Cos} \pi)$. Beydes in die Gleichung substituirt, giebt $d\varphi = \frac{d\pi \surd(1-e^2)}{1 - e \operatorname{Cos} \pi}$, woraus $\varphi = \surd(1-e^2) \int \frac{d\pi}{1 - e \operatorname{Cos} \pi}$ wird.

3) Um dies Integral sogleich durch u ausgedrückt zu erhalten, setze man in der Formel (II. 4) wieder wie vorhin $y = u$, $x = \pi$, $Fx = \operatorname{Sin} \pi$, $z = e$; dagegen aber $fx = \int \frac{d\pi}{1 - e \operatorname{Cos} \pi}$, so

wird $fy = \int \frac{du}{1 - e\,Cos\,u}$, also $\frac{d\,.\,fy}{dy} = \frac{1}{1 - e\,Cos\,u}$ und man bekommt:

$$\int \frac{d\pi}{1 - e\,Cos\,\pi} = \int \frac{du}{1 - e\,Cos\,u} + \frac{e\,Sin\,u}{1 - e\,Cos\,u} + \frac{e^2}{1.2} \frac{d\left(\frac{Sin\,u^2}{1 - e\,Cos\,u}\right)}{du} + \frac{e^3}{1.2.3\,du^2} d^2\left(\frac{Sin\,u^3}{1 - e\,Cos\,u}\right) + \ldots$$

4) Nun ist $\frac{1}{1 - e\,Cos\,u} = 1 + e\,Cos\,u + e^2\,Cos\,u^2 + e^3\,Cos\,u^3 + \ldots$ oder auf die Vielfachen von u zurückgeführt $= (1 + \frac{1}{2}e^2 + \frac{3}{8}e^4) + (e + \frac{3}{4}e^3)\,Cos\,u + (\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2}e^4)\,Cos\,2u + \frac{1}{4}e^3\,Cos\,3u + \frac{1}{8}e^4\,Cos\,4u$. Wird diese Reihe in den einzelnen Gliedern der vorigen gebraucht, so erhält man:

$$\int \frac{du}{1 - e\,Cos\,u} = (1 + \tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{3}{8}e^4)\,u + (e + \tfrac{3}{4}e^3)\,Sin\,u + (\tfrac{1}{4}e^2 + \tfrac{1}{4}e^4)\,Sin\,2u + \tfrac{1}{12}e^3\,Sin\,3u + \tfrac{1}{32}e^4\,Sin\,4u.$$

$$\frac{e\,Sin\,u}{1 - e\,Cos\,u} = (e + \tfrac{1}{4}e^3)\,Sin\,u + (\tfrac{1}{2}e^2 + \tfrac{1}{4}e^4)\,Sin\,2u + \tfrac{1}{4}e^3\,Sin\,3u + \tfrac{1}{8}e^4\,Sin\,4u.$$

$$\frac{e^2}{1.2} \cdot \frac{d\,Sin\,u^2}{1 - e\,Cos\,u} = -\tfrac{1}{8}e^3\,Sin\,u + \tfrac{1}{2}e^2\,Sin\,2u + \tfrac{3}{8}e^3\,Sin\,3u + \tfrac{1}{4}e^4\,Sin\,4u.$$

$$\frac{e^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot d^2\left(\frac{\text{Sin}\,u^3}{1-e\,\text{Cos}\,u}\right)=-\tfrac{1}{8}e^3\,\text{Sin}\,u$$

$$-\tfrac{1}{6}e^4\,\text{Sin}\,2u+\tfrac{3}{8}e^3\,\text{Sin}\,3u+\tfrac{1}{3}e^4\,\text{Sin}\,4u$$

$$\frac{e^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot d^3\left(\frac{\text{Sin}\,u^4}{1-e\,\text{Cos}\,u}\right)=$$

$$-\tfrac{1}{6}e^4\,\text{Sin}\,2u+\tfrac{1}{3}e^4\,\text{Sin}\,4u\,.$$

---

also $\int\frac{d\pi}{1-e\,\text{Cos}\,\pi}=(1+\tfrac{1}{2}e^2+\tfrac{3}{8}e^4)\,u$ $+(2e+\tfrac{3}{4}e^3)\,\text{Sin}\,u+(\tfrac{5}{4}e^2+\tfrac{1}{6}e^4)\,\text{Sin}\,2u$ $+\tfrac{13}{12}e^3\,\text{Sin}\,3u+\tfrac{100}{96}e^4\,\text{Sin}\,4u$. Dies mit $\sqrt{(1-e^2)}=1-\tfrac{1}{2}e^2+\tfrac{1}{8}e^4$ multiplicirt, giebt endlich:

$\varphi=u+(2e-\tfrac{1}{4}e^3)\,\text{Sin}\,u+(\tfrac{5}{4}e^2-\tfrac{11}{24}e^4)$ $\text{Sin}\,2u+\tfrac{13}{12}e^3\,\text{Sin}\,3u+\tfrac{100}{96}e^4\,\text{Sin}\,4u$. Wobey man nicht vergessen muß, daß diese Bogen vom Perihelium angerechnet werden.

5) Um den Calcul so zu führen, daß er sich auch auf die Bahnen der Kometen anwenden läßt, war es nothwendig vom Perihelium auszugehen. Ohnedem ist dies natürlicher und in mancher Rücksicht bequemer, als wenn man vom Aphelium anrechnet, wie auch Euler in seinem Werke de motu planetarum etc. erinnert. Da aber letzteres gleichwol unter den Astronomen noch üblich ist, so wird es nicht unnütz seyn, die bisher gefundenen Formeln auch darnach einzurichten.

§. 22.

1) Wenn man das Aphelium zum Anfangspunkte annimmt, und nun die Anomalie für eben den Punkt M = φ' setzt (die vom Perihelium aus gerechnet φ hieß), so ist $\varphi = 180^\circ + \varphi'$, weil Perihelium und Aphelium um 180° auseinander liegen. Es verhält sich nemlich damit gerade so, als wenn bey rechtwinklichten Coordinaten der Anfangspunkt der Abscissen in der Axe verändert wird; alsdann ist die neue Abscisse vor der erstern um die Distanz der beyden Anfangspunkte verschieden, und die Applicate bleibt ungeändert. Was hier Abscissen und Applicaten sind, das ist dort Anomalie und Radius Vector.

2) Man hat also in den Gleichungen allenthalben für φ, $180^\circ + \varphi'$ zu substituiren; dadurch wird $\text{Sin}\,\varphi = - \text{Sin}\,\varphi'$, $\text{Sin}\,2\varphi = + \text{Sin}\,2\varphi'$, und überhaupt $\text{Sin}\,2n\varphi = + \text{Sin}\,2n\varphi'$, $\text{Sin}\,(2n+1)\varphi = - \text{Sin}\,(2n+1)\varphi'$. So auch $\text{Cos}\,\varphi = - \text{Cos}\,\varphi'$, $\text{Cos}\,2\varphi = + \text{Cos}\,2\varphi'$ u. s. f.

3) Eben so verhält sich die Sache in Bezug auf die mittlere Anomalie, die nun begreiflich auch vom Aphelium anfängt. Setzen wir sie für diesen Anfang = u', so haben wir gleichfalls $u = 180^\circ + u'$ und $\text{Sin}\,2nu = \text{Sin}\,2nu'$, $\text{Sin}\,(2n+1)u = - \text{Sin}\,(2n+1)u'$, $\text{Cos}\,2nu = \text{Cos}\,2nu'$, $\text{Cos}\,(2n+1)u = - \text{Cos}\,(2n+1)u'$.

4) Dies substituirt, giebt aus §. 19 für r folgende Gleichung: $\frac{r}{a} = 1 + \frac{1}{2}e^2 + (e - \frac{3}{8}e^3)$ $\text{Cos}\, u' - (\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3}e^4)\,\text{Cos}\, 2u' + \frac{3}{8}e^3\,\text{Cos}\, 3u - \frac{1}{3}e^4\,\text{Cos}\, 4u$. und die Formel für r, die §. 12 n 4 durch φ ausgedrückt war, bekommt hier folgende Gestalt: $r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e\,\text{Cos}\,\varphi'}$.

5) Auch die eccentrische Anomalie ändert sich um 180°, dann wenn man in der Gleichung $\text{tang}\,\frac{1}{2}\pi = \sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi$ für π, $180° + \pi'$ setzt, so erhält man $\text{tang}(90 + {}^{1}\pi') = \sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}$ $\text{tang}\,(90° + \frac{1}{2}\varphi')$, oder $-\,\text{Cot}\,\frac{1}{2}\pi' = -\sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}\,\text{Cot}\,\frac{1}{2}\varphi'$, woraus endlich $\text{tang}\,\frac{1}{2}\pi' = \sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)}\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi'$ wird. Dies vorausgesetzt, verwandelt sich die Formel $u = \pi - e\,\text{Sin}\,\pi$ nach gehöriger Substitution in folgende: $u' = \pi' + e\,\text{Sin}\,\pi'$, so daß also u' durch φ' vermittelst π', mit geringer Abänderung der Zeichen, eben so bestimmt wird, als es bey u, φ und π der Fall ist.

6) Es bleibt noch die am Ende des §. 21 stehende Reihe für φ' und u' einzurichten übrig. Man erhält aus ihr, nachdem man die Substitution vorgenommen, und 180° von beyden Seiten subtrahirt hat, folgende:

$$\varphi' = u' - (2e - \tfrac{1}{4}e^3)\,\mathrm{Sin}\,u' + (\tfrac{5}{4}e^2 - \tfrac{11}{24}e^4)\,\mathrm{Sin}\,2u' - \tfrac{13}{12}e^3\,\mathrm{Sin}\,3u' + \text{u. s. f.}$$

7) Alle diese Reductionen können auch dadurch geschehen, daß man $-e$ statt $+e$ setzt; das will so viel sagen: man kann die Distanz des Apheliums als perihelische Distanz ansehen, für welche die Eccentricität negativ ist, oder deren zugehöriger Brennpunct hinter den Mittelpunct fällt. Diese Betrachtung versichert uns zugleich, daß in allen den Formeln die Coefficienten von $\mathrm{Sin}\,2n\varphi$ und $\mathrm{Cos}\,2n\varphi$ nur gerade Potenzen von e, die zu $\mathrm{Sin}\,(2n+1)\,\varphi$ und $\mathrm{Cos}\,(2n+1)\,\varphi$ gehörigen, nur ungerade enthalten können.

§. 23.

Die Buchstaben u' und φ' bezeichnen Längen von Kreisbogen für den Halbmesser 1, und in der Astronomie versteht man doch unter Anomalien eigentlich Winkel. Um daher die Reihe für φ' ganz zum Gebrauche einzurichten, nenne man die Werthe von u' und φ', in Graden ausgedrückt, u und φ, so wird, weil 1° die Länge $\frac{\pi}{180}$ hat, $u' = \frac{\pi u}{180}$, und $\varphi' = \frac{\pi\varphi}{180}$. Dies für u' und φ' substituirt, und dann mit $\frac{\pi}{180^\circ}$ dividirt, giebt:

$$\varphi = u - \frac{180^\circ}{\pi} \cdot (2e - \tfrac{1}{4}e^3)\,\mathrm{Sin}\,u + \frac{180^\circ}{\pi} \cdot$$

$(\frac{5}{4} e^2 - \frac{11}{24} e^4)$ Sin 2 u — u. s. f., wo $\frac{180^\circ}{\pi}$ $= 57^\circ,295779 = 57^\circ 17' 44'',8$ ist

Exempel. Für unsere Erde ist $e = 0,0167905$, also $e^2 = 0,00028192$, $e^3 = 0,0000047336$, dadurch wird $\varphi = u - 1^\circ 55' 26''$ Sin u $+ 73''$ Sin 2 u.

§. 24.

Vermittelst der eccentrischen Anomalie kann man bequem die mittlere finden, wenn die wahre Anomalie gegeben ist. (23. 5) Es läßt sich aber auch zu dieser Absicht eine Reihe gebrauchen, die man leicht aus der Formel $du = \frac{r^2 d\varphi}{a^2 \sqrt{(1-e^2)}}$ $= \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}} d\varphi}{(1 - e \operatorname{Cos} \varphi)^2}$ herleiten kann, wenn man den Nenner des Differenziales in eine Reihe auflöst und dann integrirt. Man erhält nemlich:

$$\frac{1}{(1 - e \operatorname{Cos} \varphi)^2} = 1 + 2 e \operatorname{Cos} \varphi + 3 e^2 \operatorname{Cos} \varphi^2 + 4 e^3 \operatorname{Cos} \varphi^3 + \ldots = (1 + \tfrac{3}{2} e^2 + \tfrac{15}{8} e^4) + (2e + 3e^3) \operatorname{Cos} \varphi + (\tfrac{3}{2} e^2 + \tfrac{5}{4} e^4) \operatorname{Cos} 2\varphi + e^3 \operatorname{Cos} 3\varphi + \tfrac{5}{8} e^4 \operatorname{Cos} 4\varphi + \ldots$$

Integrirt man nun, und multiplicirt dann mit $(1 - e^2)^{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{3}{2} e^2 + \frac{3}{8} e^4 \ldots$ so wird:

$$u = \varphi + 2 e \operatorname{Sin} \varphi + (\tfrac{3}{4} e^2 + \tfrac{1}{8} e^4) \operatorname{Sin} 2\varphi + \tfrac{1}{3} e^3 \operatorname{Sin} 3\varphi + \tfrac{5}{32} e^4 \operatorname{Sin} 4\varphi,$$

wobey das Aphelium zum Anfangspuncte genommen ist.

§. 25.

Der Unterschied $\varphi - u$, zwischen wahrer und mittlerer Anomalie, heißt die Gleichung des Centrums: Sie ist, wie man aus der eben gefundenen Formel sieht, von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 180^\circ$, oder vom Aphelium bis zum Perihelium negativ, d. i. man muß sie von der mittlern Anomalie abziehen, um die wahre zu erhalten. Vom Perihelium bis wieder zum Aphelium ist dagegen die wahre Anomalie größer als die mittlere. Man sagt deshalb von gedachter Gleichung, sie sey in der ersten Hälfte der Bahn subtractiv, in der zweyten additiv.

Gröste Gleichung.

§. 26.

1) Wir hatten oben (§. 21 n 1) $d\varphi = \frac{a^2\sqrt{(1-e^2)}du}{r^2}$,

woraus $d(u-\varphi) = du - d\varphi = \left(\frac{r^2 - a^2\sqrt{(1-e^2)}}{r^2}\right)$ du wird.

Die Gleichung wächst also in der ersten Hälfte der Bahn, so lange $r > (1-e^2)^{\frac{1}{4}}$ d ist, denn alsdann ist ihr Differenzial positiv; sie wird am grösten für $r = (1-e^2)^{\frac{1}{4}} a$, und nimmt dann bis zum Perihelium ab. Eben dies erfolgt in verkehrter Ordnung in der letztern Hälfte.

2) Für den Fall, wo sie am größten wird, ist also $r = a\sqrt[4]{(1-e^2)} = \frac{a(1-e^2)}{1-e\,\mathrm{Cos}\,\varphi}$, folglich $(1-e^2)^{\frac{3}{4}} = 1 - e\,\mathrm{Cos}\,\varphi$, und $\mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{1-(1-e^2)^{\frac{3}{4}}}{e}$ $= \frac{3}{4}e - \frac{3}{32}e^3$. Da dieser Werth für Cos φ sehr klein ist, so folgt, daß die größte Gleichung sehr nahe bey den Ort der Bahn falle, wo die Anomalie $= 90°$ ist.

3) Um den Punkt, wo sie einfällt, geometrisch zu bestimmen, bemerke man, daß für ihn der Radius Vector die mittlere Proportionale zwischen a und $a\sqrt{(1-e^2)}$, oder zwischen den beyden Axen, also = dem Halbmesser eines Kreises ist, der mit der Ellipse gleichen Inhalt hat. Der gedachte Punkt liegt also da, wo dieser Kreis aus dem Brennpunkte, den die Sonne einnimmt beschrieben, die Ellipse schneidet.

4) Aus $\mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{3}{4}e - \frac{3}{32}e^3$ wird $\mathrm{Sin}\,\varphi$ $= \sqrt{(1-\frac{9}{16}e^2+\frac{9}{64}e^4)} = 1 - \frac{9}{32}e^2 + \frac{9}{64}e^4$; $\mathrm{Sin}\,2\varphi = 2\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{3}{2}e - \frac{39}{64}e^3 \ldots$; $\mathrm{Sin}\,3\varphi = -1 + \ldots$ Diese Werthe in die Gleichung (23) substituirt, geben $\frac{180°}{\pi}(2e + \frac{11}{48}e^3)$ für die größte Gleichung des Centrums; die daher fast bey allen Planeten mit der doppelten Eccentricität in Bogen ausgedrückt, bis auf Secunden übereinkommt.

§. 27.

Die bisher vorgetragenen Gesetze schränken sich zum Theil nur auf die uns jetzt bekannten sieben Planeten ein; vorzüglich gilt dies von den gefundenen Reihen, bey welchen die Eccentricität immer als sehr gering angenommen ist. Die Wahrheit von allen diesem hat durch den vor nicht gar langer Zeit entdeckten siebenten Planeten neue Bestätigung erhalten, dessen Lauf um so schöner und vollkommener mit der Theorie übereinstimmt, je näher nach und nach seine Elemente bestimmt werden; der feinern Ungleichheiten desselben nicht zu gedenken, die man auch schon bereits dem Calcul unterworfen hat. Auf diesen Planeten wurde Hr. Herschel im März 1781 durch seinen großen Telescopen aufmerksam, weil er bey starker Vergrößerung einen bemerkbaren Durchmesser an ihm fand. Sein geübtes Auge unterschied sehr bald diese Erscheinung von einem Kometen; gleichwol machte er, ohne hierüber zu entscheiden, bloß seine Beobachtungen bekannt. Die tägliche Bewegung war ungefähr $1'\frac{1}{2}$ in die Länge, und fast o in die Breite. Als diese Entdeckung nach Frankreich kam, wandte Hr. de la Place eine Methode darauf an, Kometenbahnen zu bestimmen, womit er damals gerade beschäftigt war. Er fand vier Parabeln den Observationen entsprechend. Bey zweyen derselben war die Entfernung des Körpers wenig von der mittlern Distanz der Erde von der Sonne verschieden, doch warfen neu

hinzugekommene Observationen diese Hypothese binnen einiger Tage um. Bey den andern beyden war die Entfernung 18 bis 19 mal größer; einige Monate hindurch fortgesetzte Beobachtungen zeigten doch, daß auch dies Resultat nicht Probe halte. Die Nothwendigkeit immer aufs neue wegen fernerer Beobachtungen an den Parabeln ändern zu müssen, brachte ihn endlich im August 1781 auf den Gedanken, dieser Körper bewege sich vielleicht in großer Entfernung kreisförmig um die Sonne. Es war leicht nach dieser Annahme die Elemente zu berechnen, und es fand sich, daß sie mit allen bereits gemachten Observationen vortrefflich übereinstimmten. Dies Zusammentreffen dauerte das ganze Jahr 1781 durch, und einen Theil des folgenden; aber einige zu Ende dieses Jahres mit Sorgfalt angestellte Beobachtungen wollten doch nicht mehr auf die Kreisbahn passen, sondern gaben vielmehr Spuren einer Ellipse zu erkennen. Herr de la Place suchte daher eine analytische Methode durch vier Observationen von nicht sehr langer Zwischenzeit die Bahn eines Planeten zu bestimmen, und Herr Mechain theilte ihm dazu eine vom 11. May, zwey Oppositionen von 1781 und 1782, und eine dazwischen fallende Observation vom 13. May 1782 mit, aus denen er folgende Elemente der Bahn dieses Planeten fand:

Halbe große Axe . . . 19,0818
Verhältniß der Eccentricität zu dieser 0,047587

Mittlere Anomalie vom Aphelium angerechnet für den 1. Januar 1782 Mittags mittl. Zeit zu Paris . $102^\circ 59' 31''$

Länge des Apheliums in der Bahn genommen . . . $353^\circ 22' 59''$

Länge des aufsteigenden Knoten . $73^\circ 1' 0''$

Man fand nachher, daß schon Mayer ihn unter den Zodiacal-Sternen bemerkt und observirt hatte. Seine Observationen hierüber, da sie älter als 20 Jahre waren, gaben Herrn de la Place ein Mittel auch über die Inclination und die Umlaufszeit etwas gewisses zu bestimmen. Die Resultate davon sind:

Inclination der Bahn . . $46' 12''$

Zeit des Umlaufes . . $30445^d,75$ d. i. etwas über $83\frac{1}{4}$ Jahr. Das weitere über die Geschichte dieses Planeten findet man in Herrn Hofraths Kästners Astronomie.

§. 28.

Nennt man wie vorhin u die mittlere, π die eccentrische und φ die wahre Anomalie dieses Planeten, so geben die obigen Formeln:

$$u = \pi + 9815''\tfrac{1}{2} \text{ Sin } \pi$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} \varphi = 0{,}953493 \text{ tang } \tfrac{1}{2} \pi$$

$$r = 19{,}0818 + 0{,}908045 \text{ Cos } u,$$

und die gröſte Gleichung des Centrums wird $= 2e \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 5^\circ 27' 11''$. (26).

Bestimmung der Massen der Planeten.

§. 29.

Die Formel für die Umlaufszeit eines Planeten dessen mittlere Entfernung von der Sonne a, und dessen Masse im Verhältnisse gegen die der Sonne m ist, war $T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(1+m)}}$. Es sey nun t die Umlaufszeit eines seiner Trabanten, seine mittlere Entfernung von dem Planeten $= r$, seine Masse $= i$, so ist seine Umlaufszeit $t = \frac{2\pi r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(m+i)}}$.

Erstere Formel giebt $1 + m = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$, letztere $m + i = \frac{4\pi^2 r^3}{t^2}$ folglich wird $\frac{m + i}{1 + m}$

$$= \frac{r^3 T^2}{a^3 t^2}.$$

Im Zähler dieses Bruches ist i gegen m allemal sehr gering, im Nenner m gegen 1; läßt man also diese daraus weg, so wird sehr nahe: $m = \frac{r^3 T^2}{a^3 t^2}$ für die Masse eines solchen Planeten, der einen Begleiter hat, woraus mittelst seines bekannten Volumens auch seine mittlere Dichte gefunden wird.

Exempel. Die Umlaufszeit Jupiters ist $= 4332^d 14^h 24' 0'' = 4332{,}6^d$, die seines vierten Tra-

Trabanten = $16^d 16^h 32' 8''$ = $16{,}68898^d$, die Entfernung desselben vom Jupiter = 26,630 Halbmesser dieses Planeten. Dieser Halbmesser ist = 10,761 Halbmesser der Erde, wird also jene Entfernung in letzterer Einheit ausgedrückt, so bekommt man $\log r = 2{,}4572238$.

Ferner ist die Entfernung Jupiters von der Sonne = 5,2027900 Halbmesser der Erdbahn, wovon der Log. = 0,7162364 ist, die Entfernung der Erde von der Sonne ist 23413

wovon der Log. . . = 4,3694570

also $\log a = 5{,}0856934$

und folglich $l\left(\frac{a^3}{r^3}\right) = 7{,}8854088$. Außerdem ist

$l\,T = 3{,}6367486$
$l\,t = 1{,}2224299$ also

$$\log\left(\frac{T}{t}\right) = 2{,}4143187 .$$

$$\text{und} \log\left(\frac{T}{t}\right)^2 = 4{,}8286374,$$

$$\text{davon} \log\left(\frac{a^3}{r^3}\right) = 7{,}8854088 \text{ abgezogen}$$

$$\text{bleibt } l\left(\frac{r^3 T^2}{a^3 t^2}\right) = l\,m = 0{,}9432286 - 4$$

folglich $m = 0{,}0008774$. Herr de Sejour setzt sie = 0,0008706.

§. 30.

Ein Beobachter auf einem Planeten der keinen Trabanten hätte, könnte dennoch das Verhältniß der Masse desselben zu der der Sonne auf folgende Weise bestimmen.

1) Es sey die Länge des Pendels, welches an seinem Aequator Sekunden schlägt, $= l$, die Schwere daselbst $= 1$, so wie auch der Halbmesser dieses Aequators $= 1$, Setzt man daher den Weg, durch den diese Kraft einen Körper in der Zeit dt treibt, $= f dt^2$, so wird der Fallraum in 1 Secunde $= \frac{1}{2} f$, und daher $l = \frac{f}{\pi^2}$.

2) Es sey die Umlaufszeit des Planeten $= T$ in Secunden, seine mittlere Distanz von der Sonne $= a$, so ist seine Geschwindigkeit $= \frac{2\pi a}{T}$, und daher der Raum, den er in dt von seiner Bahn zurücklegt, $= \frac{2\pi a dt}{T}$, also der Weg, durch den ihn die Kraft zum Mittelpuncte treibt, $= \left(\frac{2\pi a dt}{T}\right)^2 :$

$$a = \frac{4\pi^2 a dt^2}{T^2} \text{ (§. 3).}$$

3) Man nenne m die Masse desselben, S die der Sonne, und p die Centralkraft, deren Wirkung eben (2) bestimmt ist, so hat man

$p : 1 = \frac{S}{a^2} : \frac{m}{1^2} = S : a^2 m$, also $p = \frac{S}{a^2 m}$, folglich der Weg, den diese Kraft in dt zurücklegen macht, $= pfdt^2 = \frac{Sfdt^2}{a^2 m}$. Dies mit n 2 verglichen, giebt: $\frac{Sf}{a^2 m} = \frac{4\pi^2 a}{T^2}$, woraus $m = \frac{T^2 Sf}{4\pi^2 a^3}$ wird, oder weil $f = \pi^2 l$ ist, so hat man auch $m = \frac{T^2 Sl}{4a^3}$.

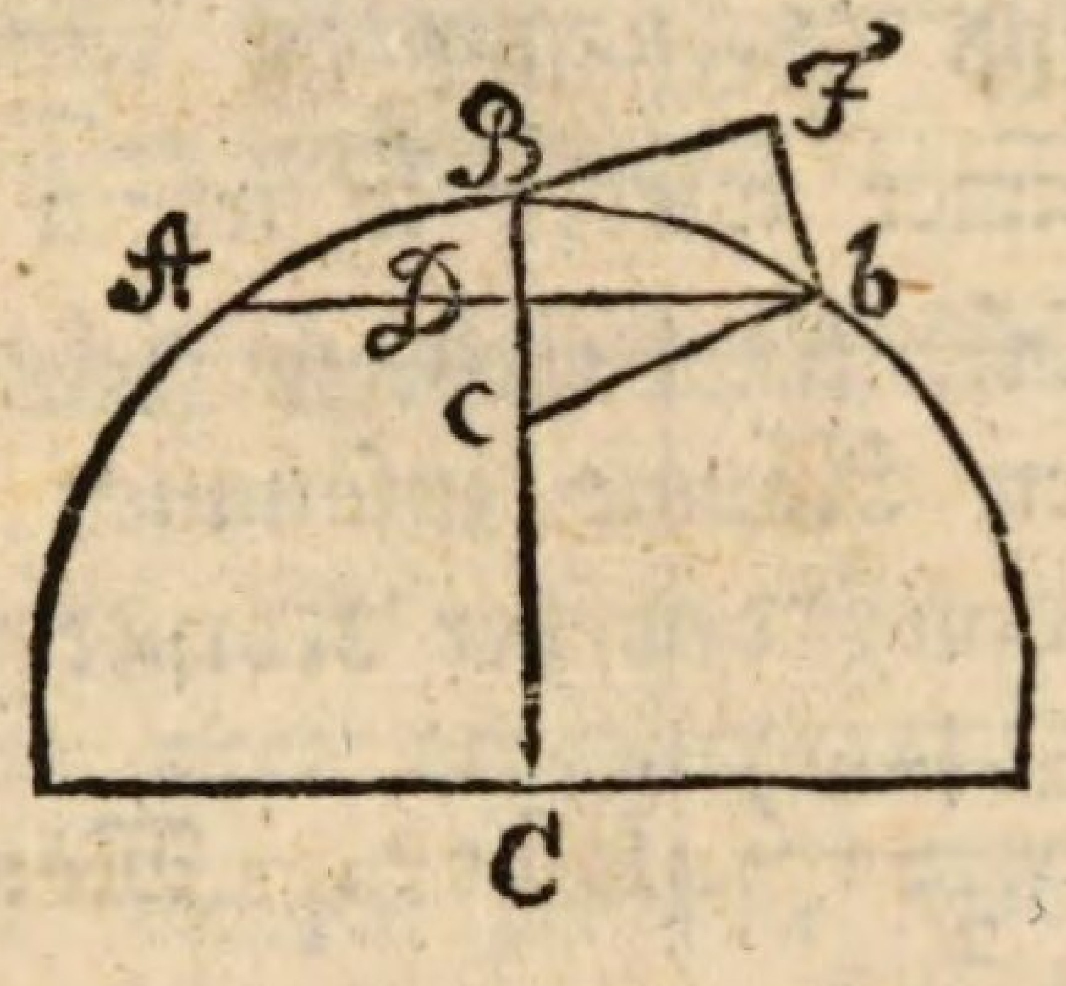
4) Man setze die Aequatorealparallaxe der Sonne für den Planeten $= \eta$, so ist sein Halbmesser $1 = a \operatorname{Sin} \eta$, also $a = \frac{1}{\operatorname{Sin} \eta}$, welches $m = \frac{1}{4} T^2 l \operatorname{Sin} \eta^3 S$, oder $\frac{m}{S} = \frac{1}{4} T^2 l \operatorname{Sin} \eta^3$ giebt.

5) Nennt man ϑ den scheinbaren Halbmesser der Sonne vom Planeten aus gesehen, so ist ihr wahrer Halbmesser $= a \operatorname{Sin} \vartheta$, also ihr Volumen $= \frac{4}{3} \pi a^3 \operatorname{Sin} \vartheta^3$, also wenn ihre Dichte Δ heißt, $S = \frac{4}{3} \pi \Delta a^3 \operatorname{Sin} \vartheta^3$. Heißt dagegen δ die Dichte des Planeten, so wird $m = \frac{4}{3} \pi \delta$, also $\frac{m}{S} = \frac{\delta}{\Delta a^3 \operatorname{Sin} \vartheta^3}$ welches mit dem vorigen verglichen, $\frac{\delta}{\Delta} = \frac{1}{4} T^2 l \operatorname{Sin} \vartheta^3$ giebt.

Exempel. Für unsere Erde ist $\eta = 8''813$, $\vartheta = 15'59''4$, $\log l = 0{,}1905134 - 7$; woraus $\frac{S}{m} = 332068$ wird.

Anmerkung. Diese Methode, die Centralkraft der Sonne mit der Schwere auf der Oberfläche zu vergleichen, wird in manchen andern Fällen angewandt. Verschiedene Schriftsteller adoptiren dabey folgende zwey Sätze: 1) die Centralkraft treibt den Körper, während er ein Element seiner Bahn beschreibt, durch den Quersinus oder die Sagitte dieses Bogens. 2) Der Weg, durch den die Schwere einen Körper in dem ersten dt treibt, ist $= g dt^2$, wenn g den Fallraum in 1 Secunde bedeutet; Sätze die selbst Herr Hofrath Karsten in seiner Mechanik der festen Körper bey Bestimmung der Schwungkraft annimmt. Bedient man sich ihrer in voriger Auflösung, so wird

$$pg\,dt^2 = \frac{Sg\,dt^2}{a^2 m} = \frac{2\pi^2 a\,dt^2}{T^2},$$ und man kommt zu eben dem Resultate. Gleichwol sind beyde Sätze falsch, aber die Fehler sind, wie man sieht, von der Art, daß sie sich gegenseitig heben, und daher in Verbindung nichts Unwahres hervorbringen. Es sey mir gestattet, hierüber ein Paar Worte zu sagen. Es ist



1) jener Raum der durch die Centralkraft entsteht, nicht die einfache Sagitte BD, sondern Bc, das Doppelte von ihr. Ersteres würde der Fall seyn, wenn der Radius genau auf der fortgesetzten Tangente senkrecht stände, wie Herr Karsten a. a. O. annimmt: aber er steht nur auf der Mitte des Bogens senkrecht und weicht beym Endpuncte B schon vom Perpendikel ab. Diese Abweichung ist zwar unendlich gering, bringt aber doch in einer unendlich kleinen Größe, wie jener Raum ist, einen Unterschied zu wege, der dieser Größe gleich kommt.

2) Der Weg durch den die Schwere den Körper in dt treibt, ist nicht gdt^2, sondern ebenfalls das Doppelte davon: $2gdt^2$. Man setze ihn $= kdt^2$, so legt der Körper im zweyten dt, vermöge seiner Trägheit, denselben Weg zurück, und wird zugleich durch die Kraft aufs neue um kdt^2 weiter getrieben. Sein Weg im zweyten Zeittheile ist also $2kdt^2$; eben so ist sein Weg im dritten $dt = 3kdt^2$.

u. s. f., und überhaupt im $n^{ten} = nkdt^2$, weil er immer wieder in jedem dt um kdt^2 von der Schwere weiter getrieben wird. Alle diese kleinen Räume zusammen geben für den ganzen Raum, den der Körper in ndt durchläuft, $\frac{n(n+1)}{2} kdt^2$. Man setze $ndt = t$, und nehme n als unendlich an, so daß t eine endliche Zahl von Sekunden wird, so hat man $n^2 dt^2 = t^2$, und $\frac{n(n+1)}{2} kdt^2 = \frac{kt^2}{2} + \frac{nkdt^2}{2} = \frac{kt^2}{2} + \frac{ktdt}{2}$, wo letzterer Theil wegfällt. Nennt man also s den in t zurückgelegten Fallraum, so wird $s = \frac{kt^2}{2}$, und da dieser auch $= gt^2$ ist, $k = 2g$, folglich der kleine Raum im ersten $dt = 2gdt^2$. Herr Euler (De motu corp. rigid. Einl. Cap. III. Prob. 10.) bestimmt diesen Raum so: Es ist $s = gdt^2$: setzt man also dt statt t, so hat man für den Raum, den der Körper im ersten dt zurücklegte, gdt^2, und da er vorhin in Ruhe war, so ist dies die eigentliche Wirkung der Kraft auf den Körper. Bey diesem Verfahren, den gedachten Raum zu bestimmen, läßt sich das erinnern, was ich beym vorigen Satze angemerkt habe: wenn man etwas unendlich Kleines bestimmen will, so muß man sich hüten, nichts von der Art vor-

her aus dem wegzulassen, woraus man es bestimmt. Der Fallraum in der Zeit t enthält außer gt^2 noch den unendlich kleinen Theil $\frac{ktdt}{2}$ oder $gtdt$; setzt man nun hierinn auch dt statt t, so wird derselbe ebenfalls gdt^2, welches zum vorigen addirt, den richtigen Weg $2gdt^2$ giebt. Ein solches Versehen von so großen Männern als Euler, Karsten, Simpson u. s. f., welches daher rührt, daß sie den ersten Grundlagen nicht Aufmerksamkeit gewürdigt haben, muß um so eher angezeigt werden, je mehr man dadurch der Autorität der Verfasser wegen beym Lesen ihrer Werke in Zweifel gerathen kann. Dies wird gegenwärtige Anmerkung rechtfertigen.

Anwendung des Bisherigen auf die Bahnen der Kometen.

§. 31.

Die Bahnen der Kometen werden gewöhnlich als Parabeln angesehen, und Newton hat auf diese Hypothese eine Theorie ihres Laufes gegründet, welche stets ein Meisterwerk der Synthesis bleiben wird. Daß indeß diese Annahme den Erfahrungen nur in so fern Genüge leiste, als das geringe Stück einer Kometen-Bahn, welches uns sichtbar wird, mit dem obern Theile einer Parabel zusammenfällt, folgt schon daraus, daß wir von vielen Kometen die Rück-

kehr wissen, welche nicht statt fände, wenn sie sich in einer vollkommenen Parabel bewegten. Auch ist dies wider alle Wahrscheinlichkeit: denn warum sollte unter den unendlich vielen möglichen Ellipsen und Hyperbeln (12, 4) die Bahn gerade eine Parabel seyn? Noch von keinem Kometen haben sich aber die Erscheinungen mit der Annahme einer Hyperbel vereinigen lassen, also sind höchstwahrscheinlich die Bahnen aller Kometen Ellipsen, deren Eccentricitäten jedoch allemal sehr groß seyn, und selbst der halben Axe nahe kommen müssen, weil sie in der Gegend des Periheliums jederzeit eine parabolische Krümmung haben. Bey dieser Voraussetzung darf man also nur den Formeln, um sie für Kometen einzurichten, eine solche Gestalt geben, daß die Glieder nach den Potenzen von 1 — e fortgehen, statt daß sie vorhin nach e geordnet waren. Merkwürdig und höchstauffallend bleibt dabey immer, daß sich die Himmelskörper unseres Sonnensystems in zwey Klassen theilen, die so ganz von einander getrennt liegen, und zwischen denen keine Spur eines Ueberganges bis jetzt sich gefunden hat.

§. 32.

Aufgabe. Aus der Anomalie eines Kometen, oder seiner Winkel-Distanz vom Perihelium, die Zeit zu bestimmen, die vom Durchgange durch das Perihelium an, bis zu dem gegebenen Orte desselben verflossen ist.

Auflösung. 1) Man behalte die oben gebrauchten Bezeichnungen bey, und setze nur $1 - e = i$, so wird $\tan g \frac{1}{2} \pi = \tan g \frac{1}{2} \varphi \sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}$ $= \tan g \frac{1}{2} \varphi \sqrt{\frac{i}{2-i}}$.

2) Substituirt man dies für $\tan g \frac{1}{2} \pi$ in der bekannten Reihe $\frac{1}{2} \pi = \tan g \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{3} \tan g \frac{1}{2} \pi^3 + \frac{1}{5} \tan g \frac{1}{2} \pi^5 - \ldots$, so wird $\frac{1}{2} \pi$

$$= \tan g \tfrac{1}{2} \varphi \sqrt{\left(\frac{i}{2-i}\right)} \cdot \left(1 - \frac{i}{3(2-i)} \tan g \tfrac{1}{2} \varphi^2 + \frac{i^2}{5(2-i)^2} \tan g \tfrac{1}{2} \varphi^4 - \ldots\right)$$

3) Man setze ferner in der Gleichung $t = a^{\frac{3}{2}} (\pi - e \operatorname{Sin} \pi)$ (14, 4), für $\operatorname{Sin} \pi$ die Reihe $\pi - \frac{1}{6} \pi^3 + \frac{1}{120} \pi^5 - \ldots$, dadurch erhält man $t = a^{\frac{3}{2}} ((1 - e) \pi + \frac{1}{6} e \pi^3 - \frac{1}{120} e \pi^5 + \ldots)$.

4) In dieser Reihe für π sein Werth (2) substituirt, giebt:

$$t = \frac{2 a^{\frac{3}{2}} i^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(2-i)}} \cdot \tan g \tfrac{1}{2} \varphi \left(1 - \frac{i}{3(2-i)} \tan g \tfrac{1}{2} \varphi^2 + \frac{i^2}{5(2-i)^2} \tan g \tfrac{1}{2} \varphi^4 - \ldots\right)$$

$$+ \frac{2^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{a^{\frac{3}{2}} i^{\frac{3}{2}} (1-i)}{(2-i)^{\frac{3}{2}}} \tan g \tfrac{1}{2} \varphi^3 \left(1 - \frac{i}{2-i}\right.$$

$$\tan\tfrac{1}{2}\varphi^2 + \ldots\Big) - \frac{2^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot$$

$$\frac{a^{\frac{3}{2}} i^{\frac{5}{2}}(1-i)}{(2-i)^{\frac{5}{2}}} \tan\tfrac{1}{2}\varphi^5 (1 - \ldots) \text{ u. s. f.}$$

5) Um diese Reihe nach den Dimensionen von i zu ordnen, kann man erstlich $\surd(2-i) = (1-\frac{1}{2}i)^{\frac{1}{2}}\cdot\surd 2 = (1-\frac{1}{4}i)\surd 2$ und $\frac{1}{\surd(2-i)} = \frac{(1+\frac{1}{4}i)\surd 2}{2}$ setzen, wenn man keine höhere Potenzen von i als $i^{\frac{5}{2}}$ beybehalten will. Dadurch wird: $\frac{2a^{\frac{3}{2}}i^{\frac{3}{2}}}{\surd(2-i)}\tan\frac{1}{2}\varphi = a^{\frac{3}{2}}i^{\frac{3}{2}}\surd 2\cdot\tan\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}a^{\frac{3}{2}}i^{\frac{5}{2}}\surd 2\cdot\tan\frac{1}{2}\varphi$, und dies mit $-\frac{i}{3(2-i)}\tan\frac{1}{2}\varphi^2 = -\frac{i}{6}\tan\frac{1}{2}\varphi^2 - \ldots$ multiplicirt, giebt für das zweyte Glied der ersten Reihe: $-\frac{1}{6}a^{\frac{3}{2}}i^{\frac{5}{2}}\surd 2\cdot\tan\frac{1}{2}\varphi^3$.

6) Hiermit darf man in der ersten Reihe abbrechen. In der zweyten wird ferner: $(2-i)^{\frac{3}{2}} = 2(1-\frac{1}{2}i)^{\frac{3}{2}}\surd 2 = 2(1-\frac{3}{4}i)\surd 2$ und

$$\frac{2^3}{1\cdot2\cdot3}\,\frac{a^{\frac{3}{2}}i^{\frac{3}{2}}}{(2-i)^{\frac{3}{2}}}\cdot\tan\tfrac{1}{2}\varphi^3 = \frac{a^{\frac{3}{2}}i^{\frac{5}{2}}\surd 2}{3}$$

$\tan g \frac{1}{2}\varphi^3 + \frac{a^{\frac{3}{2}} i^{\frac{5}{2}} \sqrt{2}}{4} \tan g \frac{1}{2}\varphi^3$. Dies mit $1 - i$ multiplicirt, giebt für das erste Glied $\frac{a^{\frac{3}{2}} i^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}}{3} \cdot \tan g \frac{1}{2}\varphi^3 - \frac{a^{\frac{3}{2}} i^{\frac{5}{2}} \sqrt{2}}{12} \tan g \frac{1}{2}\varphi$, und das noch mit $-\frac{i}{2-i} \cdot \tan g \frac{1}{2}\varphi^2 = -\frac{i}{2} \tan g \frac{1}{2}\varphi^2 - \ldots$ multiplicirt, giebt für das zweyte Glied dieser Reihe: $-\frac{a^{\frac{3}{2}} i^{\frac{5}{2}} \sqrt{2}}{6} \tan g \frac{1}{2}\varphi^5 + \ldots$

7) In der dritten Reihe brauchen wir bloß das erste Glied, und zwar mit Weglassung der beyden einfachen i im Zähler und Nenner, wodurch dasselbe $= -\frac{a^{\frac{3}{2}} i^{\frac{5}{2}} \sqrt{2}}{30} \tan g \frac{1}{2}\varphi^5$ wird.

8) Wir haben also, wenn wir alle diese gefundenen Theile sammeln:

$$t = a^{\frac{3}{2}} i^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} \cdot \tan g \tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4} a^{\frac{3}{2}} i^{\frac{5}{2}} \sqrt{2} \tan g \tfrac{1}{2}\varphi$$
$$- \tfrac{1}{6} a^{\frac{3}{2}} i^{\frac{5}{2}} \sqrt{2} \tan g \tfrac{1}{2}\varphi^3$$
$$+ \frac{a^{\frac{3}{2}} i^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}}{3} \tan g \tfrac{1}{2}\varphi^3 - \frac{a^{\frac{3}{2}} i^{\frac{5}{2}}}{12} \sqrt{2} \cdot \tan g \tfrac{1}{2}\varphi^3$$
$$- \frac{a^{\frac{3}{2}} i^{\frac{5}{2}} \sqrt{2}}{6} \tan g \varphi \tfrac{1}{2}^5$$
$$- \frac{a^{\frac{3}{2}} i^{\frac{5}{2}} \sqrt{2}}{30} \tan g \tfrac{1}{2}\varphi^5$$

$$= a^{\frac{3}{2}} i^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} \tan g \tfrac{1}{2}\varphi \left(1 + \tfrac{1}{3} \tan g \tfrac{1}{2}\varphi^2\right)$$

$+ a^{\frac{3}{2}} i^{\frac{5}{2}} \sqrt{2} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi \,.$
$(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi^2 - \frac{1}{5} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi^4)$, oder auch unter dieser Form:

$$t = a^{\frac{3}{2}} i^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} \,.\, \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi \,[1 + \frac{1}{3} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi^2 + i(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi^2 - \frac{1}{5} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi)^4 +].$$

9) Nun ist $ai = a(1 - e) =$ der perihelischen Distanz des Kometen, die wir D nennen wollen, folglich hat man auch:

$$t = D^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} \,.\, \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi \,[1 + \frac{1}{3} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi^2 + i(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi^2 - \frac{1}{5} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi^4)].$$

10) Wenn bey D der mittlere Halbmesser der Erdbahn als Einheit zum Grunde liegt, wie denn dies in der Folge immer geschehen wird, so ist der Zeitraum von $58^d 132337$ die Einheit der Zeit, womit t noch multiplicirt werden muß, um die verlangte Zeit in Tagen zu erhalten.

§. 33.

Aufgabe. Den Radius Vector durch eine ähnliche Reihe auszudrücken.

Auflösung. 1) Wenn man in der Formel $r = a\,(1 - e \operatorname{Cos} \pi)$ für $\operatorname{Cos} \pi$ die bekannte Reihe $1 - \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{24} \pi^4 + ..$ setzt, so erhält man:

$$r = a - ae(1 - \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{24} \pi^4 - ..) = ai + \frac{a(1-i)}{1 \,.\, 2} \pi^2 - \frac{a(1-i)\pi^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} + ..$$

$$= ai + \frac{2^2 ai(1-i)\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2}{2(2-i)}\left(1 - \frac{2i}{3(2-i)}\right.$$

$$\left.\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2 + .\right) - \frac{2^4 a(1-i)i^2}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,(2-i)^2}\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi^4$$

$(1 - \ldots)$ oder nach den Potenzen von i geordnet:

$$r = D\,(1 + \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2 - \tfrac{1}{2}\,i\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2$$

$$[1 + \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2) + \ldots]$$

2) Setzt man hier noch statt $1 + \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi^2$ seinen Werth $\frac{1}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\varphi^2}$ so bekommt man endlich:

$$r = \frac{D}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\varphi^2}\,(1 - \tfrac{1}{2}\,i\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi^2).$$

§. 34.

Diese Formel, so wie die vorhin für t gefundene, geben die gewöhnlichen, aus der Natur der Parabel fließenden, wenn man $i = 0$ setzt. Es wird nemlich:

1) $t = D^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}\,(\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{3}\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi^3)$ oder in Tagen ausgedrückt:

$$= 82^d{,}21158\,.\,D^{\frac{3}{2}}(\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi^3).$$

2) $r = \dfrac{D}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\varphi^2}.$

3) Die wahre Anomalie φ findet sich aus der Zeit t vermittelst der cubischen Gleichung:

$$\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi^3 + 3\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi - \frac{3\pi t\sqrt{2}}{D^{\frac{3}{2}}T} = 0,\ \text{wo}$$

T die Umlaufszeit der Erde oder das Sonnenjahr bedeutet. Setzt man der Kürze wegen $\frac{3\pi t\sqrt{2}}{D^{\frac{3}{2}}T} = 2q$, so erhält man aus ihr: tang $\frac{1}{2}\varphi$

$$= \sqrt[3]{[q+\sqrt{(q^2+1)}]} + \sqrt[3]{[q-\sqrt{(q^2+1)}]}.$$

§. 35.

Aufgabe. Aus der Zeit die wahre Anomalie des Kometen zu finden.

Auflösung. 1) Es sey u die zu t gehörige wahre Anomalie in der Parabel, worinn die Entfernung des Brennpuncts vom Scheitel = D ist, und u + x die zu eben dieser Zeit gehörige wahre Anomalie in einer sehr eccentrischen Ellipse, in der die perihelische Distanz ebenfalls D ist, so wird der Unterschied x sehr gering seyn, so daß man x^2 und ix ohne Schaden weglassen kann.

2) Von dem gesuchten u + x läßt sich der erste Theil u nach der Formel §. 34 n 3 finden, und es bleibt also nur noch x zu bestimmen übrig.

3) Zu dem Ende sey in der Ellipse die zu u gehörige Zeit = ϑ, die zu u + x gehörige = ϑ', so ist

$$\vartheta' = \vartheta + x\frac{d\vartheta}{du} + \frac{x^2}{1.2}\cdot\frac{d^2\vartheta}{du^2} + \frac{x^3}{1.2.3}\frac{d^3\vartheta}{du^3}\dots$$

und zugleich $\vartheta' = t$. Setzt man nun in diese

Reihe für ϑ seinen Werth (32 . 9) $= D^{\frac{3}{2}} \sqrt{2}$ $\tang \frac{1}{2} u [1 + \frac{1}{3} \tang \frac{1}{2} u^2 + i(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \tang \frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{5} \tang \frac{1}{2} u^4)]$, und läßt die Potenzen von x weg, so erhält man:

$$\vartheta' = t = D^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} \left\{ \begin{array}{c} \tang \frac{1}{2} u + \frac{1}{3} \tang \frac{1}{2} u^3 \\ + \frac{1}{4} i \tang \frac{1}{2} u - \\ \tang \frac{1}{2} u^3 - \frac{4}{5} \tang \frac{1}{2} u^5) \\ + x . \frac{d(\tang \frac{1}{2} u + \frac{1}{3} \tang \frac{1}{2} u^3)}{du} \end{array} \right\}$$

4) Aber t ist die zu u gehörige Zeit in der Parabel, also (34, 1) $t = D^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} (\tang \frac{1}{2} u + \frac{1}{3} \tang \frac{1}{2} u^3)$. Beyde Werthe für t einander gleich gesetzt, geben:

$$o = \frac{1}{4} i(\tang \frac{1}{2} u - \tang \frac{1}{2} u^3 - \frac{4}{5} \tang \frac{1}{2} u^5) + x . \frac{d(\tang \frac{1}{2} u + \frac{1}{3} \tang \frac{1}{2} u^3)}{du}$$

5) Das Differenzial im letzten Theile wird $= \frac{1}{2 \Cos \frac{1}{2} u^2} + \frac{\tang \frac{1}{2} u^2}{2 \Cos \frac{1}{2} u^2} = \frac{1}{2 \frac{1}{2} \Cos u^4}$, folglich hat man:

$$\frac{x}{2 \Cos \frac{1}{2} u^4} = - \frac{1}{4} i (\tang \frac{1}{2} u - \tang \frac{1}{2} u^3 - \frac{4}{5} \tang \frac{1}{2} u^5)$$

also $x = \frac{1}{2} i (\frac{4}{5} \Sin \frac{1}{2} u^4 \tang \frac{1}{2} u + \Sin \frac{1}{2} u^3 \Cos \frac{1}{2} u - \Sin \frac{1}{2} u \Cos \frac{1}{2} u^3)$
$= \frac{1}{2} i \tang \frac{1}{2} u (\frac{4}{5} \Sin \frac{1}{2} u^4 + \Sin \frac{1}{2} u^2 \Cos \frac{1}{2} u^2 - \Cos \frac{1}{2} u^4)$.

6) Nun ist noch $\text{Sin}\,\frac{1}{2}u^4 = 1 - 2\,\text{Cos}\,\frac{1}{2}u^2 + \text{Cos}\,\frac{1}{2}u^4$

$\text{Sin}\,\frac{1}{2}u^2\,\text{Cos}\,\frac{1}{2}u^2 = \text{Cos}\,\frac{1}{2}u^2 - \text{Cos}\,\frac{1}{2}u^4$, dadurch wird endlich:

$$x = \tfrac{1}{2}\,i\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u\,(\tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5}\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{6}{5}\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}u^4)$$
$$= \tfrac{1}{10}\,i\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u\,(4 - 3\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}u^2 - 6\,\text{Cos}\,\tfrac{1}{2}u^4).$$

7) Dies zu u addirt, giebt die verlangte Anomalie, welche in der Ellipse zu dem gegebenen t gehört.

Analytischer Beweis von Lambert's Theoreme.

§. 36.

Lehrsatz. Die Zeit, welche verfließt, indem ein Komet ein Stück seiner Bahn beschreibt, hängt bloß von der großen Axe dieser Bahn, der Summe der beyden Radien, die dieses Stück einschließen, und der Sehne ab, die dazwischen liegt.

Beweis. 1) Es mögen t, r, φ und π, in der bisherigen Bedeutung genommen, zum vordern Endpuncte des gedachten Bogens gehören; t', r', φ', π' zum hintern Endpuncte. Die Zwischenzeit, welche auf das gegebene Stück der Bahn verfließt, sey $= T$, $r + r' = R$ und außerdem $\frac{\pi' - \pi}{2} = u$, $\frac{\pi' + \pi}{2} = u'$, so hat man:

T =

$T = t' - t = a^{\frac{3}{2}} [\pi' - \pi - e\,(\mathrm{Sin}\,\pi' - \mathrm{Sin}\,\pi)]$ (14, 5) und $R = r + r' = 2a = ae\,(\mathrm{Cos}\,\pi' + \mathrm{Cos}\,\pi)$.

2) Nun ist $\mathrm{Sin}\,\pi' - \mathrm{Sin}\,\pi = 2\,\mathrm{Sin}\,u\,\mathrm{Cos}\,u'$, und $\mathrm{Cos}\,\pi' + \mathrm{Cos}\,\pi = 2\,\mathrm{Cos}\,u\,\mathrm{Cos}\,u'$, wodurch $T = 2a^{\frac{3}{2}}\,(u - e\,\mathrm{Sin}\,u\,\mathrm{Cos}\,u')$, und $R = 2a\,(1 - e\,\mathrm{Cos}\,u\,\mathrm{Cos}\,u')$ wird.

3) Nennt man c des Bogens Sehne, so ist $c^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'.\,\mathrm{Cos}\,(\varphi' - \varphi)$. Um hier φ wegzuschaffen, muß man $\mathrm{Sin}\,\varphi$ und $\mathrm{Cos}\,\varphi$ durch π auszudrücken suchen, wozu die Gleichung $\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\pi = \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi\,.\,\sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}$ dient, die sich folgendermaaßen behandeln läßt:

Es wird $1 + \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\pi^2 = \frac{1 + e + (1-e)\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\varphi^2}{1+e}$

oder: $\frac{1+e}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\pi^2} = \frac{1 + e\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\varphi^2}$, also $\frac{(1 + e\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\varphi^2}{\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\pi^2}$

$= 1 + e\,\mathrm{Cos}\,\varphi = \frac{a\,(1 - e^2)}{r}$ und folglich, da $\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\varphi^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Cos}\,\varphi$, $\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}\pi^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Cos}\,\pi$ ist, $\frac{1 + \mathrm{Cos}\,\varphi}{1 + \mathrm{Cos}\,\pi} = \frac{a\,(1 - e^2)}{r}$, oder $1 + \mathrm{Cos}\,\varphi$

$= \frac{a\,(1-e)}{r} + \frac{a\,(1-e)\,\mathrm{Cos}\,\pi}{r} = \frac{a\,(1 - e\,\mathrm{Cos}\,\pi)}{r}$

$+ \frac{a\,(\mathrm{Cos}\,\pi - e)}{r} = 1 + \frac{a\,(\mathrm{Cos}\,\pi - e)}{r}$ (18), also:

$$\operatorname{Cos}\varphi = \frac{a(\operatorname{Cos}\pi - e)}{r}, \text{ u. } \operatorname{Sin}\varphi^2 = 1 - \frac{a^2(\operatorname{Cos}\pi - e)^2}{r^2}$$

$$= \frac{r^2 - a^2(\operatorname{Cos}\pi - e)^2}{r^2}$$

$$= \frac{a^2(1 - e^2 - (1 - e^2)\operatorname{Cos}\pi^2)}{r^2},$$

folglich $\operatorname{Sin}\varphi = \frac{a}{r}\operatorname{Sin}\pi \sqrt{(1 - e^2)}$.

4) Eben diese Formeln gelten auch für $\operatorname{Sin}\varphi'$ und $\operatorname{Cos}\varphi'$, nur daß man π' statt π setzen muß; da nun $\operatorname{Cos}(\varphi' - \varphi) = \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Cos}\varphi' + \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Sin}\varphi'$ ist, so hat man $r r' \operatorname{Cos}(\varphi' - \varphi) = (e - \operatorname{Cos}\pi)(e - \operatorname{Cos}\pi')a^2 + \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Sin}\pi'(1 - e^2)a^2$, und folglich $c^2 = a^2(1 - e\operatorname{Cos}\pi)^2 + a^2(1 - e\operatorname{Cos}\pi')^2 - 2a^2(e - \operatorname{Cos}\pi)(e - \operatorname{Cos}\pi') - 2a^2(1 - e^2)\operatorname{Sin}\pi \operatorname{Sin}\pi' = a^2[2 - 2e(\operatorname{Cos}\pi + \operatorname{Cos}\pi') + e^2(\operatorname{Cos}\pi^2 + \operatorname{Cos}\pi'^2)] - 2a^2[e^2 - e(\operatorname{Cos}\pi + \operatorname{Cos}\pi') - \operatorname{Cos}\pi \operatorname{Cos}\pi'] - 2a^2(1 - e^2)\operatorname{Sin}\pi \operatorname{Sin}\pi' = 2a^2(1 - e^2)(1 - \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Sin}\pi' - \operatorname{Cos}\pi \operatorname{Cos}\pi') + a^2 e^2(\operatorname{Cos}\pi - \operatorname{Cos}\pi')^2$.

5) Nun ist $\operatorname{Sin}\pi \operatorname{Sin}\pi' + \operatorname{Cos}\pi \operatorname{Cos}\pi' = \operatorname{Cos}2u = 2\operatorname{Cos}u^2 - 1$, wodurch das erste Glied auf die Form $4a^2(1 - e^2)\operatorname{Sin}u^2$ gebracht wird. Ferner ist $\operatorname{Cos}\pi - \operatorname{Cos}\pi' = 2\operatorname{Sin}u \operatorname{Sin}u'$, und das Quadrat davon $= 4\operatorname{Sin}u^2 \operatorname{Sin}u'^2 = 4\operatorname{Sin}u^2 - 4\operatorname{Sin}u^2\operatorname{Cos}u'^2$; hierdurch erhält man: $c^2 = 4a^2\operatorname{Sin}u^2 - 4a^2e^2\operatorname{Sin}u^2\operatorname{Cos}u'^2 = 4a^2\operatorname{Sin}u^2(1 - e^2\operatorname{Cos}u'^2)$.

6) Aus der Gleichung $R = 2a - 2ae \operatorname{Cos} u \operatorname{Cos} u'$, wird $- e \operatorname{Cos} u' = \frac{R - 2a}{2a \operatorname{Cos} u}$; dies in c^2 substituirt, giebt $c^2 = 4a^2 \operatorname{Sin} u^2 \left(1 - \frac{(R - 2a)^2}{4a^2 \operatorname{Cos} u^2}\right) = 4a^2 \operatorname{tang} u^2$ $\left(\operatorname{Cos} u^2 - \left(\frac{R - 2a}{2a}\right)^2\right)$, und wenn man eben diesen Werth für $- e \operatorname{Cos} u'$ in der Formel (2) für T gebraucht, erhält man:

$$T = 2a^{\frac{3}{2}} \left(u + \left(\frac{R - 2a}{2a}\right) \operatorname{tang} u\right).$$

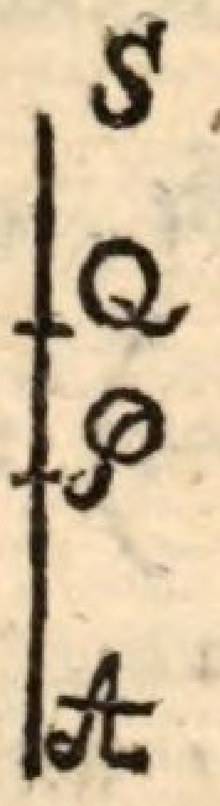
7) Vermöge dieses Ausdrucks wird T durch a, R und u bestimmt; aber u läßt sich durch die vorhergehende Formel für c, vermittelst c, a und R bestimmen, also hängt T bloß von a, R und c ab, und bleibt für einerley Werthe dieser drey Größen sich stets gleich, es mögen sich e, u und φ ändern wie man will.

§. 37.

Aufgabe. Die Zeit T, welche ein Komet oder Planet gebraucht, ein Stück seiner Bahn zu beschreiben, aus a, R und c zu bestimmen.

Auflösung. 1) Da T von e unabhängig ist, so kann man für jedes beliebige e die Aufgabe

auflösen. Es sey demnach $e = 1$, so verwandelt sich die Bahn in eine gerade Linie



APS, deren Länge $= 2a$ ist, und in deren obern Endpunct die Sonne fällt. In dieser sey PQ das Stück, das der Körper auf seinem Wege gegen die Sonne zurücklegt, so haben wir $PQ = c$, $SP = r$, $SQ = r' = r + c$, also wird $R = 2r + c$, $r = \frac{R - c}{2}$, $r' = \frac{R + c}{2}$.

2) Um zu sehen, wie sich der Körper in dieser geraden Linie bewegt, sey $SP = 2ay$, so ist der zurückgelegte Weg $AP = 2a(1 - y)$, den wir x nennen wollen. Heißt nun p die beschleunigende Kraft, welche in P auf ihn würkt, und v seine Geschwindigkeit an dieser Stelle, so ist $d^2x = pdt^2$, und $\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = p$, also $\frac{vdv}{dt} = \frac{pdx}{dt}$, oder $vdv = pdx$, woraus durch Integrirung $v^2 = C + 2\int pdx$ wird.

3) Nach dem Gesetze der Attraction ist nun $p = \frac{1}{4a^2y^2}$, welches $v^2 = C + 2\int\frac{dx}{4a^2y^2}$

giebt, und weil $dx = -2ady$ ist, so wird

$$\int \frac{dx}{4a^2y^2} = \int \frac{-dy}{2ay^2} = \frac{1}{2ay},$$

folglich $v^2 = C + \frac{1}{ay}$, und da für $SA = 2ay = 2a$, oder für $y = 1$, $v = 0$ ist, indem in A die Bewegung anfängt, so wird $C = -\frac{1}{a}$, also

$v^2 = \frac{1-y}{ay}$, $v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\left(\frac{1-y}{ay}\right)}$, woraus

$dt = \frac{dx\sqrt{ay}}{\sqrt{(1-y)}} = -\frac{2a^{\frac{3}{2}}ydy}{\sqrt{(y-y^2)}}$ wird und

folglich $t = C - a^{\frac{3}{2}} \int \frac{2ydy}{\sqrt{(y-y^2)}}$.

4) Da $\frac{2y}{\sqrt{(y-y^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(y-y^2)}} - \frac{1-2y}{\sqrt{(y-y^2)}}$ ist, so wird $\int \frac{2ydy}{\sqrt{(y-y^2)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{(y-y^2)}} - \int \frac{(1-2y)dy}{\sqrt{(y-y^2)}} = \text{arc Cos}\,(1-2y) - 2\sqrt{(y-y^2)}$. Dies Integral muß nun von $y = \frac{SP}{2a}$ bis $y = \frac{SQ}{2a}$ genommen werden; setzt man also $SP = 2aY$ und $SQ = 2aY'$, so bekommt man:

$$T = t' - t = a^{\frac{3}{2}} [\text{arc Cos}\,(1 - 2Y') - 2\sqrt{(Y' - Y'^2)} - \text{arc Cos}\,(1 - 2Y)$$

$+ 2\sqrt{}(Y - Y^2)]$, wo man statt Y', $\frac{R + c}{4a}$ und statt Y $\frac{R - c}{4a}$ zu substituiren hat.

§. 38.

Es bleibt noch übrig, diese Formel für den Fall einzurichten, wenn die Bahn eine Parabel ist. Hier ist a unendlich, und $\frac{R + c}{4a}$, $\frac{R - c}{4a}$ sind verschwindend; es kommt also darauf an, zu sehen, welches die Grenze von T für ein unendlich wachsendes a sey. Man setze

1) $\text{arc Cos}\,(1 - 2Y') = s'$, so wird $\text{Cos}\, s' = 1 - 2Y'$, folglich $\text{Sin}\, s' = 2\sqrt{}(Y' - Y'^2)$, uud eben so $\text{Sin}\, s = 2\sqrt{}(Y - Y^2)$, wenn man $\text{arc Cos}\,(1 - 2Y) = s$ setzt. Daher verwandelt sich der Ausdruck für T in folgenden:

$$a^{\frac{3}{2}}(s' - \text{Sin}\, s') - a^{\frac{3}{2}}(s - \text{Sin}\, s).$$

2) Gebraucht man die Reihe $s = \text{Sin}\, s + \frac{1}{6}\text{Sin}\, s^3 + \frac{3}{40}\text{Sin}\, s^5 + \ldots$, so wird $s - \text{Sin}\, s = \frac{1}{6}\text{Sin}\, s^3 + \frac{3}{40}\text{Sin}\, s^5 + \ldots$ und folglich:

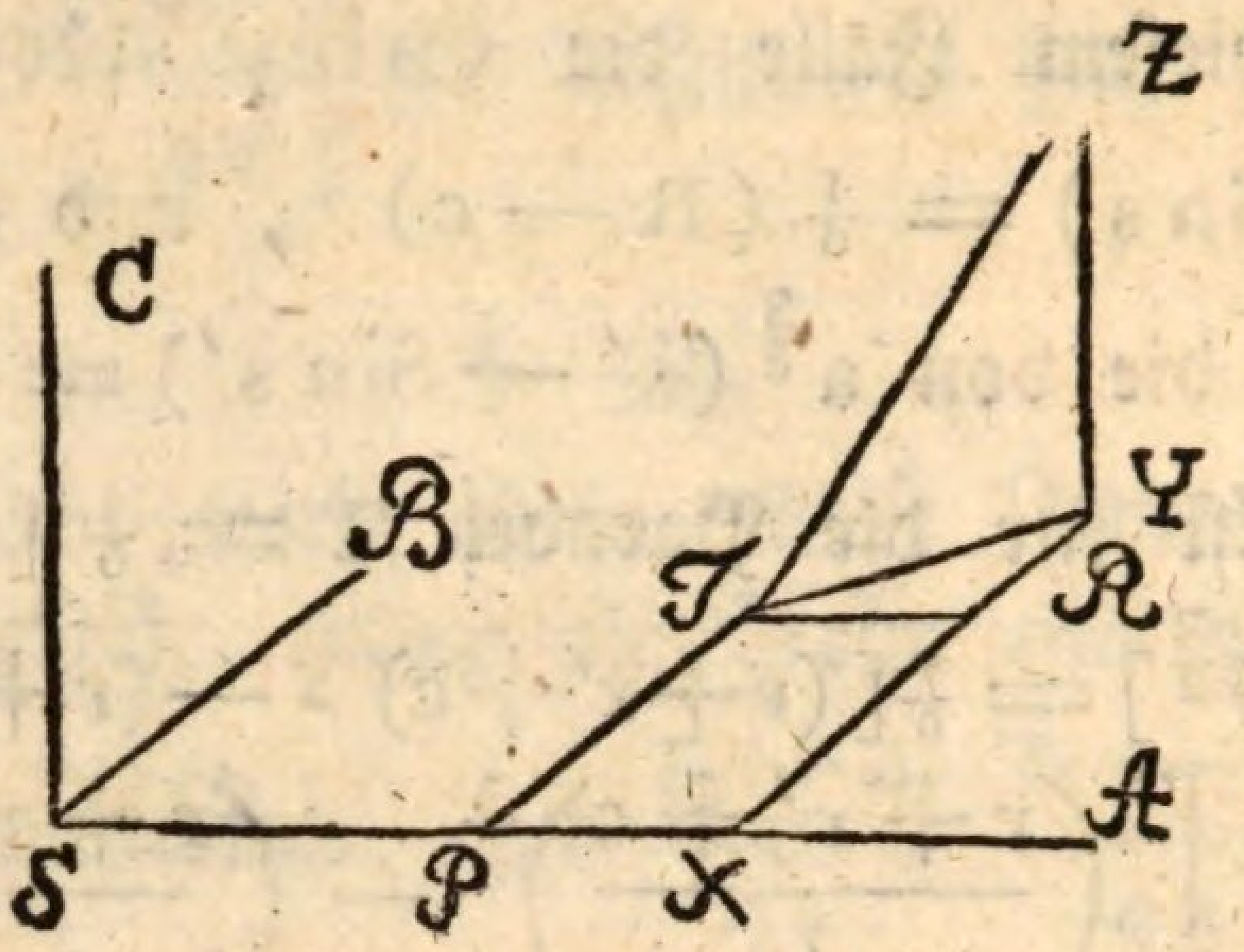
$$a^{\frac{3}{2}}(s - \text{Sin}\, s) = (a^{\frac{1}{2}}\text{Sin}\, s)^3\left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{3}{40}\text{Sin}\, s^2 + \ldots\right).$$

3) Da $\text{Sin}\, s = 2\sqrt{}(Y - Y^2) = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{}\left(R - c - \frac{(R - c)^2}{4a}\right)$ ist, so nimmt Sin s un-

endlich ab, wenn a unendlich wächst, und $a^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{Sin}\,s$ nähert sich unendlich der Grenze $\sqrt{(R-c)}$, also wird in diesem Falle die Grenze des Ausdrucks $a^{\frac{3}{2}}(s-\mathrm{Sin}\,s) = \frac{1}{6}(R-c)^{\frac{3}{2}}$, und da auf gleiche Weise die von $a^{\frac{3}{2}}(s'-\mathrm{Sin}\,s') = \frac{1}{6}(R+c)^{\frac{3}{2}}$ wird, so ist für die Parabel $T = \frac{1}{6}\left[(R+c)^{\frac{3}{2}} - (R-c)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{1}{6}\left[(r+r'+c)^{\frac{3}{2}} - (r+r'-c)^{\frac{3}{2}}\right]$, oder $= \frac{4}{3}\left[\left(\frac{r+r'+c}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{r+r'-c}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$.

4) Da hier die Einheit $58^{d}1321325$ zum Grunde liegt, so wird auch, in Tagen ausgedruckt: $T = 9^{d},688724 \,.\, \left[(r+r'+c)^{\frac{3}{2}} - (r+r'-c)^{\frac{3}{2}}\right]$. Dies ist die bekannte, von Lambert gefundene Formel, deren sich manche zur Bestimmung der Kometenbahnen als eines Hülfsmittels bedienen. Aus diesem Grunde verdiente ein analytischer Beweis von ihr hier eine Stelle, wenn gleich im Folgenden kein Gebrauch davon gemacht wird.

Bestimmung der Kometen-Bahnen aus Observationen.



§. 39.

Um den Lauf eines Kometen auf drei rechtwinklichte Coordinaten zu bringen, nehme man drei im Mittelpunkte der Sonne S sich senkrecht schneidende Axen SA, SB und SC an, von denen die ersten beiden in die Ecliptik fallen; außerdem gehe SA verlängert durch 0° ♈, so geht SB durch 0° ♋, und SC durch den nördlichen Pol der Ecliptik. In Bezug auf diese Axen seyen $SX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ die Coordinaten für die Bahn des Kometen, der sich in Z befinden mag, während die Erde in T ist, für deren Lauf wir $SP = X$, $PT = Y$ setzen wollen. Nach dieser Vorbereitung findet man die zu unsrer Absicht erforderlichen Gleichungen auf folgende Art:

1) Man setze, der Komet entferne sich in dt um das Element $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ seiner Bahn von der Sonne, so sind dx, dy, dz die

Wege, welche er in diesem dt nach den Richtungen der drei Axen macht. Im folgenden dt beschreibt er nun $dx + d^2x$, $dy + d^2y$, $dz + d^2z$ nach eben den Richtungen, also hat ihn in diesem Zeittheilchen die Kraft der Sonne durch d^2x, d^2y, d^2z weiter getrieben.

2) Man nenne r die Distanz SZ des Kometen von der Sonne, so ist die Kraft, womit diese ihn anzieht $= \frac{1}{r^2}$ und nach ZS gerichtet. Man zerlege sie nach Richtungen die mit YS und ZY parallel sind, so entspringen daraus die Kräfte $\frac{SY}{r^3}$ und $\frac{z}{r^3}$. Erstere wieder nach AS und BS zerlegt, giebt $\frac{x}{r^3}$ und $\frac{y}{r^3}$.

3) Die Kräfte worin $\frac{1}{r^2}$ zerfällt, sind also $\frac{-x}{r^3}$ nach SA, $\frac{-y}{r^3}$ nach SB, und $\frac{-Z}{r^3}$ nach SC.

4) Die Wege durch die in dt diese drei Kräfte den Kometen führen, müssen den Aenderungen (1) gleich seyn, wofern die Masse desselben gegen die der Sonne, und folglich auch seine gegenseitige Wirkung auf sie, vernachlässigt wird. Diese sind nun $\frac{-xdt^2}{r^3}$, $\frac{-ydt^2}{r^3}$, $\frac{-zdt^2}{r^3}$, also bekommt man

folgende drei Gleichungen: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3} = o$, $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{r^3} = o$, $\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{r^3} = o$.

§. 40.

Man ziehe TR mit SA parallel, und setze die geocentrische Länge des Kometen $YTR = \alpha$, seine geocentrische Breite $ZTY = \vartheta$, außerdem sey die Distanz des Kometen von der Erde $TZ = \varrho$, so wird $RT = PX = \varrho \operatorname{Cos} \alpha$, $RY = \varrho \operatorname{Sin} \alpha$, folglich $x = X + \varrho \operatorname{Cos} \alpha$, $y = Y + \varrho \operatorname{Sin} \alpha$, und $z = \varrho \operatorname{tang} \vartheta$. Dies giebt

1) $dx = dX + \operatorname{Cos} \alpha \, d\varrho - \varrho \operatorname{Sin} \alpha \, d\alpha$

$d^2x = d\ X + \operatorname{Cos} \alpha \, d^2\varrho - 2 \operatorname{Sin} \alpha \, d\alpha \, d\varrho - \varrho \operatorname{Sin} \alpha \, d^2\alpha - \varrho \operatorname{Cos} \alpha \, d\alpha^2$

und $dy = dY + \operatorname{Sin} \alpha \, d\varrho + \varrho \operatorname{Cos} \alpha \, d\alpha$

$d^2y = d^2Y + \operatorname{Sin} \alpha \, d^2\varrho + 2 \operatorname{Cos} \alpha \, d\alpha \, d\varrho + \varrho \operatorname{Cos} \alpha \, d^2\alpha - \varrho \operatorname{Sin} \alpha \, d\alpha^2$

2) Aus den beiden erstern Differenzial-Gleichungen der Bahn wird ferner:

$$d^2x \operatorname{Sin} \alpha + \frac{x \operatorname{Sin} \alpha}{r^3} dt^2 = o$$

$$d^2y \operatorname{Cos} \alpha + \frac{y \operatorname{Cos} \alpha}{r^3} dt^2 = o,$$

welche von einander subtrahirt $d^2x \operatorname{Sin} \alpha - d^2y \operatorname{Cos} \alpha + \frac{(x \operatorname{Sin} \alpha - y \operatorname{Cos} \alpha)}{r^3} dt^2 = o$ geben.

3) Nun ist $x \operatorname{Sin}\alpha = X \operatorname{Sin}\alpha + \varrho \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Sin}\alpha$ und $y \operatorname{Cos}\alpha = Y \operatorname{Cos}\alpha + \varrho \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha$ also $x \operatorname{Sin}\alpha - y \operatorname{Cos}\alpha = X \operatorname{Sin}\alpha - Y \operatorname{Cos}\alpha$. Ferner (1)

$$d^2 x \operatorname{Sin}\alpha = d^2 X \operatorname{Sin}\alpha + \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha\, d^2\varrho - 2 \operatorname{Sin}\alpha^2 d\varrho\, d\alpha - \varrho \operatorname{Sin}\alpha^2 d^2\alpha - \varrho \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha\, d\alpha^2$$

$$d^2 y \operatorname{Cos}\alpha = d^2 Y \operatorname{Cos}\alpha + \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha\, d^2\varrho + 2 \operatorname{Cos}\alpha^2 d\varrho\, d\alpha + \varrho \operatorname{Cos}\alpha^2 d^2\alpha - \varrho \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha\, d\alpha^2$$

folglich: $d^2 x \operatorname{Sin}\alpha - d^2 y \operatorname{Cos}\alpha = d^2 X \operatorname{Sin}\alpha - d^2 Y \operatorname{Cos}\alpha - 2\, d\alpha\, d\varrho - \varrho\, d^2\alpha$, und daher

$$d^2 X \operatorname{Sin}\alpha - d^2 Y \operatorname{Cos}\alpha - 2\, d\alpha\, d\varrho - \varrho\, d^2\alpha + \left(\frac{X \operatorname{Sin}\alpha - Y \operatorname{Cos}\alpha}{r^3}\right) dt^2 = 0.$$

4) Multiplicirt man dagegen erstere mit $\operatorname{Cos}\alpha$, letztere mit $\operatorname{Sin}\alpha$, und addirt sie dann, so bekommt man:

$$d^2 x \operatorname{Cos}\alpha + d^2 y \operatorname{Sin}\alpha + \left(\frac{x \operatorname{Cos}\alpha + y \operatorname{Sin}\alpha}{r^3}\right) dt^2 = 0.$$

Nun ist
$$d^2 x \operatorname{Cos}\alpha = d^2 X \operatorname{Cos}\alpha + \operatorname{Cos}\alpha^2 d^2\varrho - 2 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha\, d\alpha\, d\varrho - \varrho \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha\, d^2\alpha - \varrho \operatorname{Cos}\alpha^2 d\alpha^2$$

$$d^2 y \operatorname{Sin}\alpha = d^2 Y \operatorname{Sin}\alpha + \operatorname{Sin}\alpha^2 d^2\varrho + 2 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha\, d\alpha\, d\varrho + \varrho \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Cos}\alpha\, d^2\alpha - \varrho \operatorname{Sin}\alpha^2 d\alpha^2$$

also $d\; x \operatorname{Cos}\alpha + d^2 y \operatorname{Sin}\alpha = d^2 X \operatorname{Cos}\alpha + d^2 Y \operatorname{Sin}\alpha + d^2\varrho - \varrho\, d\alpha^2$

Ferner $x \operatorname{Cos}\alpha = X \operatorname{Cos}\alpha + \varrho \operatorname{Cos}\alpha^2$

$y \operatorname{Sin}\alpha = Y \operatorname{Sin}\alpha + \varrho \operatorname{Sin}\alpha^2$ folglich:

$x \operatorname{Cos}\alpha + y \operatorname{Sin}\alpha = X \operatorname{Cos}\alpha + Y \operatorname{Sin}\alpha + \varrho$, wodurch jene Gleichung sich in folgende umändert:

$$\operatorname{Cos}\alpha\, d^2 X + \operatorname{Sin}\alpha\, d^2 Y + d^2\varrho$$

$$+\left(\frac{X\,\mathrm{Cos}\,\alpha + Y\,\mathrm{Sin}\,\alpha + \varrho}{r^3}\right)dt^2 = 0.$$

§. 41.

Man nenne R den Radius Vector der Erdbahn, so hat man für X und Y zwei ähnliche Differenzial-Gleichungen: $\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{X}{R^3} = 0$ und $\frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{Y}{R^3} = 0$, aus deren Verbindung wieder neue fließen; man erhält nemlich:

1) $\mathrm{Sin}\,\alpha\, d^2X - \mathrm{Cos}\,\alpha\, d^2Y = \left(\frac{Y\,\mathrm{Cos}\,\alpha - X\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{R^3}\right)dt^2$, welches in 40, 3 substituirt, die Gleichung

$$\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right)(Y\,\mathrm{Cos}\,\alpha - X\,\mathrm{Sin}\,\alpha)\,dt^2 - 2\,d\alpha\,d\varrho - \varrho\,d^2\alpha = 0$$ giebt.

2) Eben so wird $d^2X\,\mathrm{Cos}\,\alpha + d^2Y\,\mathrm{Sin}\,\alpha = -\left(\frac{X\,\mathrm{Cos}\,\alpha + Y\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{R^3}\right)dt^2$, wodurch die andere Gleichung (4) sich in folgende umändert:

$$d^2\varrho - \varrho\,d\alpha^2 - \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right)(X\,\mathrm{Cos}\,\alpha + Y\,\mathrm{Sin}\,\alpha)\,dt^2 + \frac{\varrho\,dt}{r^3} = 0.$$

3) Heißt ferner A die heliocentrische Länge der Erde TSA, so wird $X = R\,\mathrm{Cos}\,A$, $Y = R\,\mathrm{Sin}\,A$, also

$Y \cos\alpha - X \sin\alpha = R (\sin A \cos\alpha - \cos A \sin\alpha)$ $= R \sin(A - \alpha)$, und $X \cos\alpha + Y \sin\alpha$ $= R (\cos A \cos\alpha + \sin A \sin\alpha) = R \cos(A - \alpha)$. Dies beides in die Gleichungen (1, 2) substituirt, giebt: $\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) R \sin(A - \alpha) dt^2 - 2 d\alpha d\varrho$ $- \varrho d^2\alpha = 0$ und

$$d^2\varrho - \varrho d\alpha^2 - \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) R \cos(A - \alpha) dt^2 + \frac{\varrho dt^2}{r^3} = 0.$$

§. 42.

Auch die dritte Differenzial-Gleichung $d^2z + \frac{z dt^2}{r^3} = 0$ läßt sich in Anwendung bringen. Dies geschieht folgendermaßen:

1) Es ist $z = \varrho \operatorname{tang}\vartheta$ also $dz = \frac{\varrho d\vartheta}{\cos\vartheta^2}$ $+ \operatorname{tang}\vartheta d\varrho$, und $d^2z = \frac{\varrho d^2\vartheta}{\cos\vartheta^2} + \frac{2\varrho \sin\vartheta d\vartheta^2}{\cos\vartheta^3}$ $+ \frac{2 d\varrho d\vartheta}{\cos\vartheta^2} + \operatorname{tang}\vartheta d^2\varrho$, wodurch die Gleichung diese Gestalt erhält:

$$\varrho d^2\vartheta + 2\varrho \operatorname{tang}\vartheta d\vartheta^2 + 2 d\varrho d\vartheta + \sin\vartheta \cos\vartheta d^2\varrho + \frac{\varrho \sin\vartheta \cos dt^2}{r^3} = 0.$$

2) Um $d^2\varrho$ wegzuschaffen, multiplicire man die zweite Gleichung der beiden zu Ende des vorigen § stehenden mit $\text{Sin}\,\vartheta\,\text{Cos}\,\vartheta$ und ziehe sie von gegenwärtiger ab, so bleibt:

$$\varrho(d\alpha^2\,\text{Sin}\,\vartheta\,\text{Cos}\,\vartheta + 2\,\text{tang}\,\vartheta\,d\vartheta^2 + d^2\vartheta)$$
$$+\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right)R\,\text{Cos}\,(A-\alpha)\,\text{Sin}\,\vartheta\,\text{Cos}\,\vartheta\,dt^2$$
$$+2\,d\varrho\,d\vartheta = 0.$$

3) Aus dieser Gleichung erhält man:

$$\frac{d\varrho}{dt} = -\tfrac{1}{2}\varrho\left(\frac{d\alpha^2\,\text{Sin}\,\vartheta\,\text{Cos}\,\vartheta}{d\vartheta\,dt} + \frac{2\,d\vartheta\,\text{tang}\,\vartheta}{dt}\right.$$
$$\left. + \frac{d^2\vartheta}{d\vartheta\,dt}\right) - \tfrac{1}{2}R\left(\frac{1}{R^3}-\frac{1}{r^3}\right).$$
$$\text{Cos}\,(A-\alpha)\,\text{Sin}\,\vartheta\,\text{Cos}\,\vartheta\,.\,\frac{dt}{d\vartheta}.$$

§. 43.

Wir haben oben (13, 4) gesehen, daß die Geschwindigkeit in der Parabel $= \sqrt{\frac{2}{r}}$ sey. Betrachten wir also die Bahn des Kometen als parabolisch, so wird $\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} - \frac{2}{r} = 0$, indem $dx^2 + dy^2 + dz$ das Quadrat des Elements seiner Bahn ausdrückt. Nun hatten wir:

1) $dx = dX + \text{Cos}\,\alpha\,d\varrho - \varrho\,\text{Sin}\,\alpha\,d\alpha$, also wird:

$$dx^2 = dX^2 + 2\,Cos\,\alpha\, dX\, d\varrho + Cos\,\alpha^2\, d\varrho^2 - 2\,\varrho\, Sin\,\alpha\, dX\, d\alpha - 2\,Sin\,\alpha\, Cos\,\alpha\, d\varrho\, d\alpha + \varrho^2\, Sin\,\alpha^2\, d\alpha^2.$$

Ferner $dy = dY + Sin\,\alpha\, d\varrho + \varrho\, Cos\,\alpha\, d\alpha$, also:

$$dy^2 = dY^2 + 2\,Sin\,\alpha\, dY\, d\varrho + Sin\,\alpha^2\, d\varrho^2 + 2\,\varrho\, Cos\,\alpha\, dY\, d\alpha + 2\,\varrho\, Sin\,\alpha\, Cos\,\alpha\, d\varrho\, d\alpha + \varrho^2\, Cos\,\alpha^2\, d\alpha^2$$ und endlich

$$dz = \left(\frac{\varrho\, d\vartheta + Sin\,\vartheta\, Cos\,\vartheta\, d\varrho}{Cos\,\vartheta^2}\right)$$ also

$$dz^2 = \frac{\varrho^2\, d\vartheta^2 + 2\,\varrho\, Sin\,\vartheta\, Cos\,\vartheta\, d\varrho + Sin\,\vartheta^2\, Cos\,\vartheta^2\, d\varrho^2}{Cos\,\vartheta^4}$$

2) Diese Quadrate zusammen addirt geben:

$$dX^2 + dY^2 + 2\, d\varrho\,(Cos\,\alpha\, dX + Sin\,\alpha\, dY) + d\varrho^2 - 2\,\varrho\, d\alpha\,(Sin\,\alpha\, dX - Cos\,\alpha\, dY) + \varrho^2\, d\alpha^2 + \frac{\varrho^2\, d\vartheta^2}{Cos\,\vartheta^4} + 2\,\varrho\, tang\,\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta + tang\,\vartheta^2\, d\varrho^2 - \frac{2\,dt^2}{r} = 0,$$

3) Wir hatten (41) $X\, Cos\,\alpha + Y\, Sin\,\alpha = R\, Cos\,(A - \alpha)$; dieses differenziirt giebt: $Cos\,\alpha\, dX + Sin\,\alpha\, dY + (Y\, Cos\,\alpha - X\, Sin\,\alpha)\, d\alpha = Cos\,(A - \alpha)\, dR + R\, Sin\,(A - \alpha)\, d\alpha - R\, Sin\,(A - \alpha)\, dA$. Da nun $Y\, Cos\,\alpha - X\, Sin\,\alpha = R\, Sin\,(A - \alpha)$ ist, so wird:

$$Cos\,\alpha\, dX + Sin\,\alpha\, dY = Cos\,(A - \alpha)\, dR - R\, Sin\,(A - \alpha)\, dA.$$

4) Eben so war: $Y\, Cos\,\alpha - X\, Sin\,\alpha = R\, Sin\,(A - a)$, welches auf gleiche Art $Cos\,\alpha\, dY - Sin\,\alpha\, dX$

$- (X \cos\alpha + Y \sin\alpha)\, d\alpha = \sin(A - \alpha)\, dR - R \cos(A - \alpha)\, d\alpha + R \cos(A - \alpha)\, dA$ giebt, und da $X \cos\alpha + Y \sin\alpha = R \cos(A - \alpha)$ ist, so bleibt:

$$\cos\alpha\, dY - \sin\alpha\, dX = \sin(A - \alpha)\, dR + R \cos(A - a)\, dA.$$

5) Dies beydes substituirt, wird:

$$dX^2 + dY^2 + 2 d\varrho [\cos(A - \alpha) dR - R \sin (A - \alpha) dA] + d\varrho^2 + 2\varrho d\alpha [\sin(A - \alpha) dR + R \cos(A - \alpha) dA] + \varrho^2 d\alpha^2 + \frac{\varrho^2 d\vartheta^2}{\cos\vartheta^2}$$
$$+ 2\varrho \tang\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta + \tang\vartheta^2 d\varrho^2 - \frac{2 dt^2}{r} = 0.$$

6) Wird diese Gleichung durch dt^2 dividirt, so wird das erstere Glied $\frac{dX^2 + dY^2}{dt^2}$, welches das Quadrat der Geschwindigkeit der Erde ausdrückt. Für diese hat man aus §. 13. 3, wenn man $a = 1$ setzt, $\sqrt{\left(\frac{2}{R} - 1\right)}$, und fürs Quadrat $\frac{2}{R} - 1$. Es sey $R = 1 - \omega$, so wird, indem ω sehr gering ist, $\frac{1}{R} = 1 + \omega$, also $\frac{dX^2 dY^2}{dt^2} = \frac{2}{R} - 1 = 1 + 2\omega = (1 + \omega)^2 = \frac{1}{R^2}$. Dies substituirt giebt:

$$\frac{d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2}{\cos\vartheta^2 dt^2} + \frac{\varrho^2 d\alpha^2}{dt^2} + \frac{2\varrho \tang\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta}{dt^2}$$

+ 2

$$+\frac{2\,d\varrho}{dt}\left(\frac{dR}{dt}\operatorname{Cos}(A-\alpha)-\frac{dA}{dt}\cdot R\operatorname{Sin}(A-\alpha)\right)$$
$$+\frac{2\varrho\, d\alpha}{dt}\left(\frac{dR}{dt}\operatorname{Sin}(A-\alpha)+\frac{dA}{dt}\cdot R\operatorname{Cos}(A-\alpha)\right)$$
$$+\frac{1}{R^2}-\frac{2}{r}=0$$

eine Gleichung die deshalb vorzüglich brauchbar wird, weil nur Differenziale der ersten Ordnung darinn vorkommen, welche sich, wie wir sehen werden, weit genauer aus Observationen bestimmen lassen, als die zweyten.

§. 44.

Aus der erhaltenen Gleichung lassen sich noch $\frac{dR}{dt}$ und $\frac{dA}{dt}$ durch die bekannten Elemente der Erdbahn wegschaffen; es ist nemlich:

1) $\frac{dA}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit der Erde, welche für $a = 1$ aus (13, 5). $= \frac{\sqrt{(1-e^2)}}{R^2}$ wird, wofür wir $\frac{1}{R^2}$ annehmen können, weil e sehr gering ist.

2) Wenn H die Länge ihres Apheliums bedeutet, so hat man die wahre Anomalie $= A - H$ aus den astronomischen Tafeln, und

$$R = \frac{1 - e^2}{1 - e \operatorname{Cos}(A - H)},$$

also $dR = \frac{- e(1 - e^2) \operatorname{Sin}(A - H)\, dA}{(1 - e \operatorname{Cos}(A - H)^2} =$

$- \frac{e R^2 \operatorname{Sin}(A - H)\, dA}{1 - e^2}$. Nun ist $R^2\, dA = dt$

$\sqrt{(1 - e^2)}$, also wird $dR = \frac{- e \operatorname{Sin}(A - H)\, dt}{\sqrt{(1 - e^2)}}$,

$$\text{oder } \frac{dR}{dt} = \frac{- e \operatorname{Sin}(A - H)}{\sqrt{(1 - e^2)}}.$$

3) Um diesen Ausdruck noch bequemer einzurichten, sey R' der Radius Vector, welcher der Länge $90° + A$ entspricht, so ist $R' = \frac{1 - e^2}{1 + e \operatorname{Sin}(A - H)}$, folglich $e \operatorname{Sin}(A - H) = \frac{1 - e^2 - R'}{R'}$, also $\frac{dR}{dt}$ $= \frac{R' - 1 + e^2}{R' \sqrt{(1 - e^2)}}$, und wenn wir e^2 wegwerfen, und $R' = 1 + \omega'$ setzen: $\frac{dR}{dt} = \frac{\omega'}{1 + \omega'} = \omega'$ $- \omega'^2$. Behält man davon nur die erste Potenz, weil ω' in die Ordnung e gehört, so bleibt endlich

$$\frac{dR}{dt} = \omega = R' - 1.$$

4) Dies für $\frac{dA}{dt}$ und $\frac{dR}{dt}$ gesetzt, giebt:

$$\frac{d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2}{\mathrm{Cos}\,\vartheta^2 dt^2} + \frac{\varrho^2 d\alpha^2}{dt^2} + \frac{2 d\varrho}{dt}\left((R' - 1)\,\mathrm{Cos}\,(A - \alpha) - \frac{\mathrm{Sin}\,(A - \alpha)}{R}\right) + \frac{2\varrho d\alpha}{dt}\left((R' - 1)\,\mathrm{Sin}\,(A - \alpha) + \frac{\mathrm{Cos}\,(A - \alpha)}{R}\right) + \frac{1}{R^2} - \frac{2}{r} = 0.$$

§. 45.

Die bisher gefundenen Gleichungen für die Bahn des Kometen sind folgende:

1) $\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) R\,\mathrm{Sin}\,(A - \alpha) - \frac{2\,d\alpha\,d\varrho}{dt^2} - \frac{\varrho d^2\alpha}{dt^2} = 0$ (41, 3).

2) $\frac{d\varrho}{dt} = -\frac{1}{2}\varrho\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\vartheta\,\mathrm{Cos}\,\vartheta\,d\alpha^2}{d\vartheta\,dt} + \frac{2\,\mathrm{tang}\,\vartheta\,d\vartheta}{dt} + \frac{d^2\vartheta}{d\vartheta\,dt}\right) - \frac{1}{2} R \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) \cdot \mathrm{Cos}\,(A - \alpha)\ \mathrm{Sin}\,\vartheta\,\mathrm{Cos}\,\vartheta \cdot \frac{d\vartheta}{dt}$ (§. 42, 3).

3) Die im vorigen §. am Ende stehende.

Hierüber bemerke man Folgendes:

1) In diesen drey Gleichungen sind dem Anscheine nach sieben unbekannte Größen vorhanden, nemlich r, ϱ, $\frac{d\varrho}{dt}$, $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\frac{d\vartheta}{dt}$, $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$, wovon man

glauben sollte, sie wären alle durch Observationen gleich unbestimmbar. Wir haben aber (III. 5) eine Methode angegeben, wodurch $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, so wie $\frac{d\vartheta}{dt}$, $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$, vermittelst mehrerer Werthe von α und ϑ, die zu einer Reihe von Werthen für t gehören, gefunden werden können; so daß sich also diese vier Größen als bekannt voraussetzen lassen, wenn mehrere auf einander folgende Observationen der geocentrischen Längen und Breiten des Kometen gegeben sind.

2) Diesem zufolge sind nur r, ϱ, und $\frac{d\varrho}{dt}$ in den Gleichungen unbekannt. Aber auch r hängt hier noch von ϱ ab, wodurch die Zahl der unbekannten Größen auf zwey gebracht wird. Es ist nemlich $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + 2\varrho X \operatorname{Cos}\alpha + \varrho^2 \operatorname{Cos}\alpha^2 + Y^2 + 2\varrho Y \operatorname{Sin}\alpha + \varrho^2 \operatorname{Sin}\alpha^2 + \varrho^2 \operatorname{tang}\vartheta^2 = R^2 + 2\varrho(X \operatorname{Cos}\alpha + Y \operatorname{Sin}\alpha) + \varrho^2(1 + \operatorname{tang}\vartheta^2) = R^2 + 2\varrho R \operatorname{Cos}(A - \alpha) + \frac{\varrho^2}{\operatorname{Cos}\vartheta^2}$, also ist r durch ϱ gegeben.

3) Es wird hier vorausgesetzt, und bedarf kaum einer Erinnerung, daß A und R aus der Theorie der Erde für jeden Zeitpunkt bekannt sind, wozu die Astronomischen Tafeln dienen. Man kann auch zur Sicherheit bei Observirung des Kometen zugleich A messen, woraus man die heliocentrische Länge, und folglich auch R findet.

4) Hat man auf solche Weise ϱ und $\frac{d\varrho}{dt}$ aus den drei Gleichungen in Verbindung mit n 2 gefunden, so lassen sich aus diesen, wie wir nachher sehen werden, die Elemente der Kometenbahn leicht bestimmen.

§. 46.

1) Da x und y in der Bedeutung als Coordinaten nicht weiter vorkommen, so sey für den gewählten Zeitpunct $\varrho = x$, $\frac{d\varrho}{dt} = y$, ferner $\frac{d\alpha}{dt} = a$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = b$, $\frac{d\vartheta}{dt} = h$, $\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = l$, so bekommen gedachte Gleichungen folgende Gestalt:

$$\text{I. } y = -\tfrac{1}{2}x\left(\frac{a^2 \operatorname{Sin}\vartheta \operatorname{Cos}\vartheta}{h} + 2h \operatorname{tang}\vartheta + \frac{l}{h}\right) + \tfrac{1}{2}\frac{R}{h}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) \cdot \operatorname{Cos}(A-\alpha)\operatorname{Sin}\vartheta\operatorname{Cos}\vartheta$$

$$\text{II. } \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) R \operatorname{Sin}(A-\alpha) = 2ay + bx.$$

$$\text{III. } \frac{y^2 + h^2x^2}{\operatorname{Cos}\vartheta^2} + a^2x^2 + 2hy\operatorname{tang}\vartheta + 2y\left((R'-1)\operatorname{Cos}(A-\alpha) - \frac{\operatorname{Sin}(A-\alpha)}{R}\right) + 2ax\left((R'-1)\operatorname{Sin}(A-\alpha) + \frac{\operatorname{Cos}(A-\alpha)}{R}\right) + \frac{1}{R^2} - \frac{2}{r} = 0.$$

IV. Außerdem ist noch (34, 2) $r^2 = R^2 + 2\,Rx\,\mathrm{Cos}(A - \alpha) + \frac{x^2}{\mathrm{Cos}\,\vartheta^2}$.

2) Aus diesen vier Gleichungen kann man nun x und y auf mehrerley Art finden, und die ganze Sache ist jetzt auf ein bloßes algebraisches Problem gebracht. Man könnte aus den Gleichungen eine hervorbringen, die nur x allein enthielte, indem man aus I und II die Größe $\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}$ eliminirte, wodurch man eine Gleichung von der Form $fx + gy = o$ erhielte, welche in III gebraucht, y aus dieser fortschafte, und eine von der Form $f'x^2 + g'x + i = \frac{1}{r}$ hervorbrächte. Diese endlich quadrirt, und den Werth für r^2 aus IV in ihr substituiret, gäbe die verlangte Gleichung für x. Da diese Gleichung auf den sechsten Grad steigt, so mögte es doch nicht rathsam seyn, sie unbedingt zur Berechnung von x anzuwenden, und ausserdem geht man nicht sicher genug, wenn man nicht nach den Umständen diejenigen Gleichungen am meisten benutzt, welche der Genauigkeit wegen den andern vorzuziehen sind.

3) Ist b beträchtlich größer als l, so kann man auf die Genauigkeit von b mehr bauen, weil einerley Fehler bey größeren Größen weniger in Betracht kommen, und man voraussetzen darf, bey den gefundenen Größen b, l, a und h seyen gleiche

Fehler begangen. Man hat also in diesem Falle die Gleichung II der I vorzuziehen; die Gleichung III muß man aber immer gebrauchen, weil sie frey von den zweiten Differenzialen b und l ist. Hat man also III mit II verbunden, und das r aus der neuen Gleichung weggeschaft, so bleibt bloß eine Gleichung für x rückständig, die dann auch y und r giebt, und der zuletzt I zur Probe dient.

4) Ist aber $l > b$, so nehme man I zu Hülfe, und lasse am Ende II zur Probe dienen.

§. 47.

Aufgabe. Aus den für einen angenommenen Zeitpunkt gefundenen Werthen x und y die perihelische Distanz des Kometen zu finden.

Auflösung. 1) Wir hatten oben allgemein $dr^2 + r^2 d\varphi^2 - 2\left(k + \frac{1+m}{r}\right)dt^2 = 0$ (12, 2). Wird dies auf den Kometen angewandt, so kann m weggelassen werden, weil die Massen der Kometen theils wegen ihres nicht sehr großen Durchmessers, theils wegen ihrer geringen Dichte, jederzeit gegen die der Sonne klein sind; dadurch wird zugleich $k = -\frac{1}{2a}$, also hat man $dr^2 + r^2 d\varphi^2 - \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{r}\right)dt = 0$.

2) Statt $r^2 d\varphi^2$ setze man $\frac{(r^2 d\varphi)^2}{r^2}$, welches sich, weil $r^2 d\varphi = h dt = dt \sqrt{[a(1 - e^2)]}$ ist (21), in $\frac{a(1 - e^2) dt^2}{r^2}$ verwandelt. Nun ist $a(1 - e^2) = a(1 - e)(1 + e)$, und in der Parabel $e = 1$, und $a(1 - e) =$ der perihelischen Distanz, welche wir oben D genannt haben; also ist $a(1 - e^2) = 2D$, folglich wird $r^2 d\varphi^2 = \frac{2D dt^2}{r^2}$.

3) Außerdem ist $\frac{1}{a} = 0$, also bekommt die Gleichung (1) diese Gestalt: $dr^2 + \left(\frac{2D - 2r}{r^2}\right) dt = 0$, welches $D = r - \frac{1}{2} \left(\frac{rdr}{dt}\right)^2$ giebt.

4) Da $r^2 = R^2 + 2Rx \operatorname{Cos}(A - \alpha) + \frac{x^2}{\operatorname{Cos}\vartheta^2}$, so wird, wenn man differenziirt: $\frac{rdr}{dt}$
$= R \frac{dR}{dt} + R \frac{dx}{dt} \operatorname{Cos}(A - \alpha) + x \operatorname{Cos}(A - \alpha).$
$\frac{dR}{dt} - R x \operatorname{Sin}(A - \alpha) \frac{dA}{dt} + x R \operatorname{Sin}(A - \alpha)$
$\frac{d\alpha}{dt} + \frac{x dx}{\operatorname{Cos}\vartheta^2 dt} + \frac{x^2 \operatorname{Sin}\vartheta d\vartheta}{\operatorname{Cos}\vartheta^3 dt} = R(R' - 1)$
$+ R y \operatorname{Cos}(A - \alpha) + (R' - 1) x \operatorname{Cos}(A - \alpha)$
$\frac{- x \operatorname{Sin}(A - \alpha)}{R} + a R x \operatorname{Sin}(A - \alpha) + \frac{xy}{\operatorname{Cos}\vartheta^2}$

$$+\frac{hx^2 \operatorname{Sin}\vartheta}{\operatorname{Cos}\vartheta^3} = \frac{x}{\operatorname{Cos}\vartheta^2}(y + hx \operatorname{tang}\vartheta)$$

$$+ Ry \operatorname{Cos}(A - \alpha) + x\left((R' - 1)\operatorname{Cos}(A - \alpha)\right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{Sin}(A - \alpha)}{R}\right) + aRx\operatorname{Sin}(A - \alpha) + R(R' - 1).$$

5) Da ausserdem r aus x und y bekannt ist, so läßt sich auch D aus ihnen finden.

§. 48.

Aufgabe. Aus eben diesen Größen x und y die Anomalie des Kometen für den angenommenen Zeitpunkt, und die Zeit seines Durchgangs durch das Perihelium zu bestimmen.

Auflösung. 1) Aus der Gleichung $r = \frac{D}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\varphi^2}\left(1 - \frac{i}{2}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi^2 + \ldots\right)$ (21, 3) wird für die Parabel, wo $i = o$ ist: $r = \frac{D}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\varphi^2}$, dies giebt $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\varphi = \mp\sqrt{\left(\frac{D}{r}\right)}$ wo D und r beyde durch x und y gegeben sind

2) Man nenne den Winkel wovon $\sqrt{\left(\frac{D}{r}\right)}$ der Cosinus ist, γ, so kann $\frac{1}{2}\varphi = \gamma$ oder $-\gamma$ oder $180° - \gamma$ seyn. Letzterer wäre stumpf und die

Nähe des Kometen ergiebt, daß er so weit vom Perihelium nicht entfernt seyn kann; also ist nur noch auszumachen, ob $\varphi = + 2\gamma$ oder $= - 2\gamma$ seyn muß.

3) Um dies zu entscheiden, dürfte man nur wissen, ob der Radius Vector an der observirten Stelle der Bahn, für welche x und y berechnet sind, wachsend oder abnehmend sey. Im erstern Falle hätte der Komet das Perihelium schon zurückgelegt (weil die Radien in der Parabel vom Scheitel aus wachsen, und nach dem Scheitel zu kleiner werden) und entfernte sich wieder von der Sonne; alsdann wäre die Anomalie positiv. Im andern Falle näherte er sich der Sonne, und befände sich also noch vor dem Perihelium, folglich wäre dann die Anomalie negativ.

4) Nun ist bekannt, daß das Differenzial einer wachsenden Größe positiv und das einer abnehmenden negativ ist; man erfährt also, ob r wachse oder abnehme, wenn man $\frac{dr}{dt}$ sucht, und auf das Zeichen desselben Acht hat. Aber eben dies Zeichen muß auch $\frac{rdr}{dt}$ haben, weil r immer positiv ist, folglich giebt auch $\frac{rdr}{dt}$ zu erkennen, je nachdem es positiv oder negativ ist, ob r wachse oder abnehme, folglich auch, ob φ positiv oder negativ sey. Was nun

$\frac{rdr}{dt}$ anbetrifft, so ist es die Größe, welche (47.3) zur Berechnung von D gebraucht wird.

5) Ferner hat man $t = 109^d\ 14^h\ 45'\ 45'' \times D^{\frac{3}{2}}\ (\tang \frac{1}{2}\varphi^3 + 3 \tang \frac{1}{2}\varphi)$, (32,9), welches die Zeit ist, die der Komet auf das Stück seiner Bahn vom Perihelium an bis zu dem Orte der mittleren Observation zubringt, woraus die Zeit des Durchganges durch das Perihelium bekannt wird.

6) Ist dieses t positiv, so zeigt das an, daß der Komet im gedachten Zeitpunkte das Perihelium schon zurück gelegt hat, und dann muß man begreiflich um so viel als t beträgt, zurückrechnen, um zu finden, wann er im Scheitel war. Wenn dagegen t negativ ist, so fällt die Zeit des Durchgangs durch das Perihelium noch um so viel hinaus.

§. 49.

Bey der Anwendung der unter den vorangeschickten Sätzen (III. 5) gegebenen Formel bedeuten ζ, ζ' u. s. f. die geocentrischen Längen des Kometen für die Observationszeiten $\vartheta + i$, $\vartheta + 2i$ u. s. f., wenn man $\frac{d\alpha}{dt}$ und $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ berechnen will, und die geocentrischen Breiten, wenn $\frac{d\vartheta}{dt}$ und $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ berechnet werden sollen. Ausserdem bedeutet Z die geocen=

trische Länge α für den Zeitpunkt ϑ, den man in der Rechnung als den Anfangspunkt annimmt, im ersten Falle, und die geocentrische Breite im letztern.

Dieser gedachte Zeitpunkt ist willkührlich; man thut aber wohl, ihn mitten zwischen die Observationszeiten zu setzen. So z. B. kann man die Zeit $\vartheta + i''$ dafür annehmen, wodurch $\vartheta = \vartheta + i''$ folglich $i'' = 0$ wird. Dies kürzt die Koefficienten sehr ab, und macht, daß die Reihen für $\frac{dZ}{dt}$ und $\frac{d^2Z}{dt}$ schnell convergiren.

Anwendung des Bisherigen auf den zweyten Kometen des Jahres 1781.

§. 50.

Ueber diesen Kometen hat man folgende, von Mechain zu Paris angestellte Observationen:

1781	Geocentr. Länge	Nördl. Breite
den 14. Novemb.	307° 14′ 45″	55° 17′ 9″
— 17. —	306° 57′ 32″	44° 17′ 12″
— 19. —	306° 51′ 26″	39° 14′ 48″
— 22. —	306° 44′ 53″	33° 49′ 1″
— 25. —	306° 41′ 37″	29° 58′ 43″

Die jedesmal. Obs.-Zeit um 8 Uhr 29′ 44″ mittl. Zeit zu Paris.

1) Wählt man hier den 19. Nov. 8^h 29′ 44″ zum Anfangs-Zeitpuncte, so ist $i'' = 0$, $i = -5^d$, $i' = -2^d$, $i'' = 0$, $i''' = 3^d$, $i'''' = 6^d$.

2) Ferner wird für den Calcul der Länge α, $\delta\zeta = -5',44'',33$ $\delta^2\zeta = 32'',266$, $\delta^3\zeta = -2'',733$, $\delta^4\zeta = 0'',2546$, woraus man $\frac{dZ}{dt} = \delta\zeta + 7\delta^2\zeta + 10\delta^3\zeta - 30\delta^4\zeta = 153''46$ erhält.

3) Diesen Winkel in einem Bogen verwandelt, der zu einem Kreise mit dem Halbmesser 1 gehört, gäbe $\frac{d\alpha}{dt}$. Aber hierbey ist noch folgendes in Betracht zu ziehen: die Werthe i, i', i'' u. s. w. sind in Tagen bestimmt, also liegt auch bey dem Werthe, den wir für $\frac{dZ}{dt}$ erhalten haben, der Tag als Einheit zum Grunde; dagegen ist der bisherige Calcul nach einer ganz andern Einheit geführt, (s. §. 6 und 7) auf die sich alle Größen in demselben beziehen, welche von der Zeit abhängen, also auch $\frac{d\alpha}{dt}$. Sie ist $= 58^d,1321325$ . ., welche Zahl für jetzt k heißen mag. Man muß also das dt in $\frac{dZ}{dt}$ erst auf diese Einheit bringen, ehe man weiter rechnet, oder $\frac{dt}{k}$ statt diesem dt setzen, wodurch sich $\frac{dZ}{dt}$ in $\frac{kdZ}{dt}$ verwandelt. Dies vorausgesetzt, wird (weil $\frac{1}{1296000}$ des ganzen Kreises auf eine

Secunde geht) $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\pi}{1296000} \times \frac{k\,dZ}{dt}$ $= 0{,}0002818335 \cdot \frac{dZ}{dt} = 0{,}0432501.$

4) Man erhält ferner $\frac{d^2Z}{2dt^2} = \delta^2\zeta - (i + i' + i'')\delta^3\zeta + ii' + ii'' + ii''' + i'i'' + i'i''' + i''i'''\delta^4\zeta - \ldots = \delta^2\zeta + 7\delta^3\zeta - 11\delta^4\zeta \ldots$ woraus $\frac{d^2Z}{dt^2} = 21''{,}08$ wird.

5) Vermöge der No. 3 gemachten Erinnerung muß man also für dt^2, $\frac{dt^2}{k^2}$ setzen. Dies giebt $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{2\pi}{1296000} \cdot \frac{k^2d^2Z}{dt^2} = 0{,}0163836\,\frac{d^2Z}{dt^2}$ $= 0{,}345366.$

6) Zur Berechnung von $\frac{d\vartheta}{dt}$ und $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ bekommt man $\delta\zeta = -3^\circ 39' 59'''$; $\delta^2\zeta = 13'45''{,}4$; $\delta^3\zeta = -39''{,}2666$; $\delta^4\zeta = 1''{,}3766$, welches in obige für $\frac{dZ}{dt}$ erhaltene Reihe gesetzt, $\frac{dZ}{dt}$ $= -7855{,}1\ \ldots$ giebt, und daraus hat man $\frac{d\vartheta}{dt} = 0{,}0002818335 \cdot \frac{dZ}{dt} = -2{,}213844.$ Eben so wird $\frac{d^2Z}{dt^2} = 535{,}4$ und folglich

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = 0{,}0163836 \cdot \quad \frac{d^2Z}{dt^2} = 17{,}54354.$$

7) Außerdem ist für den angenommenen Zeitpunct: $A = 57°57'4''$, $R = 0{,}987248$, $R' = 0{,}988820$. Diese Werthe für alle die in den Gleichungen des §. 46 vorkommenden bekannten Größen gebraucht, geben nun:

$$\text{I. } y = 3{,}9927\,x - 10{,}64846 \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right)$$

$$= -11{,}0665 + 10{,}64846 \cdot \frac{1}{r^3} + 3{,}9927\,x.$$

$$\text{II. } y = 5{,}771014\,x - 0{,}03931687 \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) = -0{,}04086053 + 5{,}771014\,x$$

$$+ 0{,}03931687 \cdot \frac{1}{r^3}.$$

$$\text{III. } 0 = y^2 + 0{,}00187057\,x^2 + (0{,}8169372\,y - 3{,}691334\,x)^2 - 1{,}8820446\,y + 0{,}0324357\,x + 1{,}026006 - \frac{2}{r}.$$

$$\text{IV. } r^2 = 1{,}667387\,x^2 - 0{,}7106137\,x + 0{,}974653.$$

8) Zuvörderst wird aus I, $\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} = 0{,}3749554\,x - 0{,}0939103\,y$. Dies in II

gesetzt, giebt $y = 5,771014\,x - 0,014742043\,x + 0,003692252\,y$; also $0,996307748\,y = 5,756272\,x$; $y = 5,7776\,x$, wovon wir die ersten drey Decimalstellen behalten wollen.

9) Daher $y^2 = 33,373729\,x^2$;
$(0,8169372\,y - 3,691334\,x)^2 = 1,1113761\,x^2$;
also (III) $34,486975\,x^2 - 10,84014\,x + 1,026006 - \frac{2}{r} = 0$.

Ferner $\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3} = -0,1674644\,x$ also:

$$\frac{1}{r^3} = 1,038253 + 0,1674644\,x$$

$$r^2 = 1,667387\,x^2 - 0,7106137\,x + 0,974653$$

$$\frac{1}{r} = 0,27922\,x^3 + 1,6121671\,x^2 - 0,574577\,x + 1,0119362,$$ welches in die vorhergehende Gleichung substituirt, folgende giebt:

$$0,55844\,x^3 - 31,262641\,x^2 + 9,69099\,x + 0,997866 = 0.$$

10) Für $x = 0$, ist der Ausdruck linker Hand positiv, für $x = 1$, negativ, also fällt die Wurzel zwischen 0 und 1: Man setze $x = \frac{1}{2} + p$, so wird $p = -0,09$, also beynahe $x = 0,4$. Genauer darf man x aus dieser Gleichung nicht suchen, weil sie sich zum Theil auf die Gleichung I grün-

gründet, die aus vorhin angeführten Gründen etwas fehlerhaft seyn kann.

11) Man setze daher $x = 0,4 + q$, so wird (IV) $r^2 = 0,95719 + 0,6232959\ q$, also

$$r = 0,97836 + 0,31854\ q$$

$$\frac{1}{r^3} = 1,067832 - 1,04301 \cdot q$$

$$0,03931687 \cdot \frac{1}{r^3} = 0,0419838$$

$- 0,0410079\ q$, folglich aus II $y = 2,3095289 + 5,730006 \cdot q$.

Dies in III substituirt, giebt:

$$y^2 = 5,333924 + 26,4672289 \cdot q$$

$0,8169372\ y - 3,691334\ x = 0,4102065 + 0,989721 \cdot q$, wovon das Quadrat $= 0,168169 + 0,81198\ q$ ist. Ferner $1,8820446\ y = 4,346636 - 10,78413\ q$ und endlich $\frac{2}{r} = 2,044236 - 0,66557 \cdot q$. Dadurch wird:

$$0,150500 + 17,19458 \cdot q = 0,\ \text{also}$$

$q = - 0,00875$, und $x = 0,4 + q = 0,39124$.

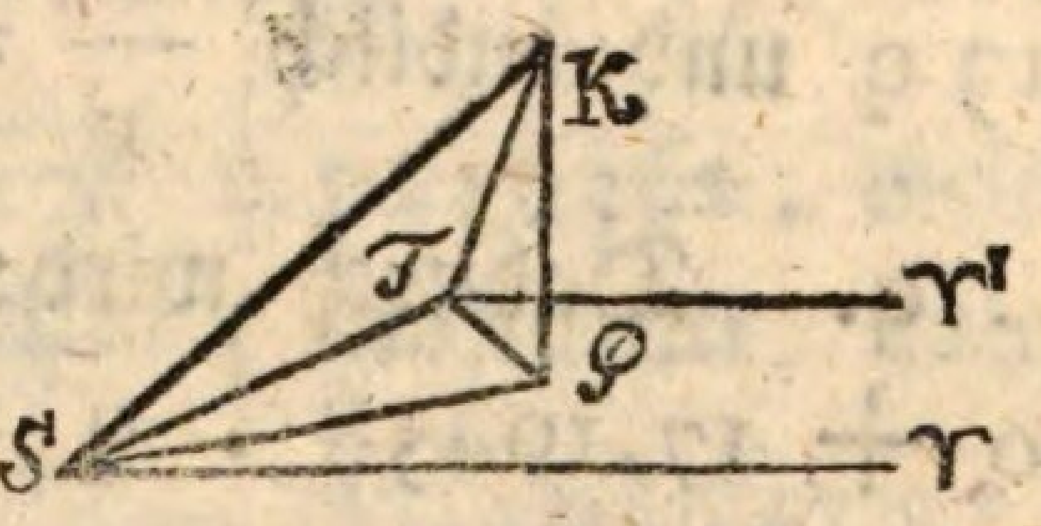
12) Stellt man nun mit $x = 0,3912$ die letztere Rechnung von neuen an, so findet man $x = 0,39107$, $y = 2,258355$, $r = 0,9755798$, welche Werthe der Gleichung I so genau Gnüge thun, als man von dieser erwarten kann.

13) Dadurch wird nun $\frac{rdr}{dt} = -0{,}185628$, und $D = 0{,}9583509$; ferner die Anomalie für den angenommenen Zeitpunct $= -15^\circ 16' 24''$, die negativ ist, weil sie mit $\frac{rdr}{dt}$ einerley Zeichen haben muß (37), welches $t = -10^d{,}40334$ giebt. Da diese negativ ist, so fällt die Zeit des Durchganges durch das Perihelium den 29. Nov. $18^h 10' 34''$.

Berichtigung des Gefundenen und Berechnung der übrigen Elemente der Bahn.

§. 51.

Aufgabe. Aus der geocentrischen Länge und Breite des Kometen, und dem daraus berechneten Radius Vector, seine heliocentrische Länge und Breite zu finden.



Auflösung. 1) Es sey S die Sonne, S♈ die durch 0° ♈ gehende Linie, T die Erde, und K der Komet. Man fälle das Perpendikel KP auf die Ecliptik, und nenne KTP die geocentrische Breite des Kometen ϑ; ♈'TP seine geocentrische Länge α. Ferner sey wieder die heliocentrische Länge der Erde TS♈ $= A$, die des Kometen PS♈ $= \beta$, seine

heliocentrische Breite $KSP = \pi$, so ist $STP = ST\Upsilon' - PT\Upsilon', = 180^\circ - A - \alpha$.

2) In der Ecke, die bei T sich schließt, und an TP rechtwinklicht ist, sey $STK = \zeta$, so hat man $\text{Cos}\,\zeta = \text{Cos}\,STP \,.\, \text{Cos}\,PTQ = - \text{Cos}\,(A + \alpha)\ \text{Cos}\,\vartheta$; daraus wird im Dreyecke STK, worin nun $ST = R$, $SK = r$ und $STK = \zeta$ bekannt sind, der Winkel KST gefunden, den wir ψ nennen wollen. Es ist nemlich $\text{tang}\,\psi = \dfrac{R\,\text{Sin}\,\zeta}{r - R\,\text{Cos}\,\zeta}$.

3) In eben gedachter Ecke heiße 8 die Neigung der Flächen STK und STP gegen einander, so wird $\text{Sin}\,STK : 1 = \text{Sin}\,KTP : \text{Sin}\,8$, also $\text{Sin}\,8 = \dfrac{\text{Sin}\,\vartheta}{\text{Sin}\,\zeta}$; ferner $1 : \text{Sin}\,\psi = \text{Sin}\,8 : \text{Sin}\,\pi$, folglich $\text{Sin}\,\pi = \text{Sin}\,8\ \text{Sin}\,\psi = \dfrac{\text{Sin}\,\vartheta\ \text{Sin}\,\psi}{\text{Sin}\,\zeta}$.

4) Endlich hat man aus der Ecke, die sich bey S schließt, und an SP rechtwinklicht ist, den Winkel STP; es ist nemlich $\text{Cos}\,KST = \text{Cos}\,KSP \,.\, \text{Cos}\,TSP$ also $\text{Cos}\,TSP = \dfrac{\text{Cos}\,KST}{\text{Cos}\,KSP} = \dfrac{\text{Cos}\,\psi}{\text{Cos}\,\pi}$. Da nun $TSP = TS\Upsilon + PS\Upsilon = A - \beta$, so wird $\text{Cos}\,(A - \beta) = \dfrac{\text{Cos}\,\psi}{\text{Cos}\,\pi}$, woraus β gefunden wird.

5) Dieser gefundene Werth für Cos $(A - \beta)$ kann zu $A - \beta$, oder zu $360° - (A - \beta)$ gehören; welcher Winkel von beyden zu nehmen sey, wird in der Folge sich bestimmen.

§. 52.

Aufgabe. Aus dreyen mittlern Beobachtungen die schon gefundenen Elemente der Bahn genauer zu bestimmen.

Auflösung. 1) Unter einer mittleren Beobachtung soll hier das Resultat mehrerer nahe auf einander folgender Beobachtungen verstanden werden. Man berechnet aus einer Reihe von beobachteten α und ϑ, wie vorhin gezeigt ist, für einen mittlern Zeitpunkt die Werthe r und φ, und daraus β und π, so wie D, und die Zeit des Durchganges durchs Perihelium; alles dies macht denn eine mittlere Beobachtung aus.

2) Solcher mittlern Beobachtungen wollen wir drey als bekannt voraussetzen, welche aber in einiger Zeit-Entfernung von einander getrennt seyn müssen, damit sie ein beträchtliches Stück der Bahn des Kometen in sich begreifen.

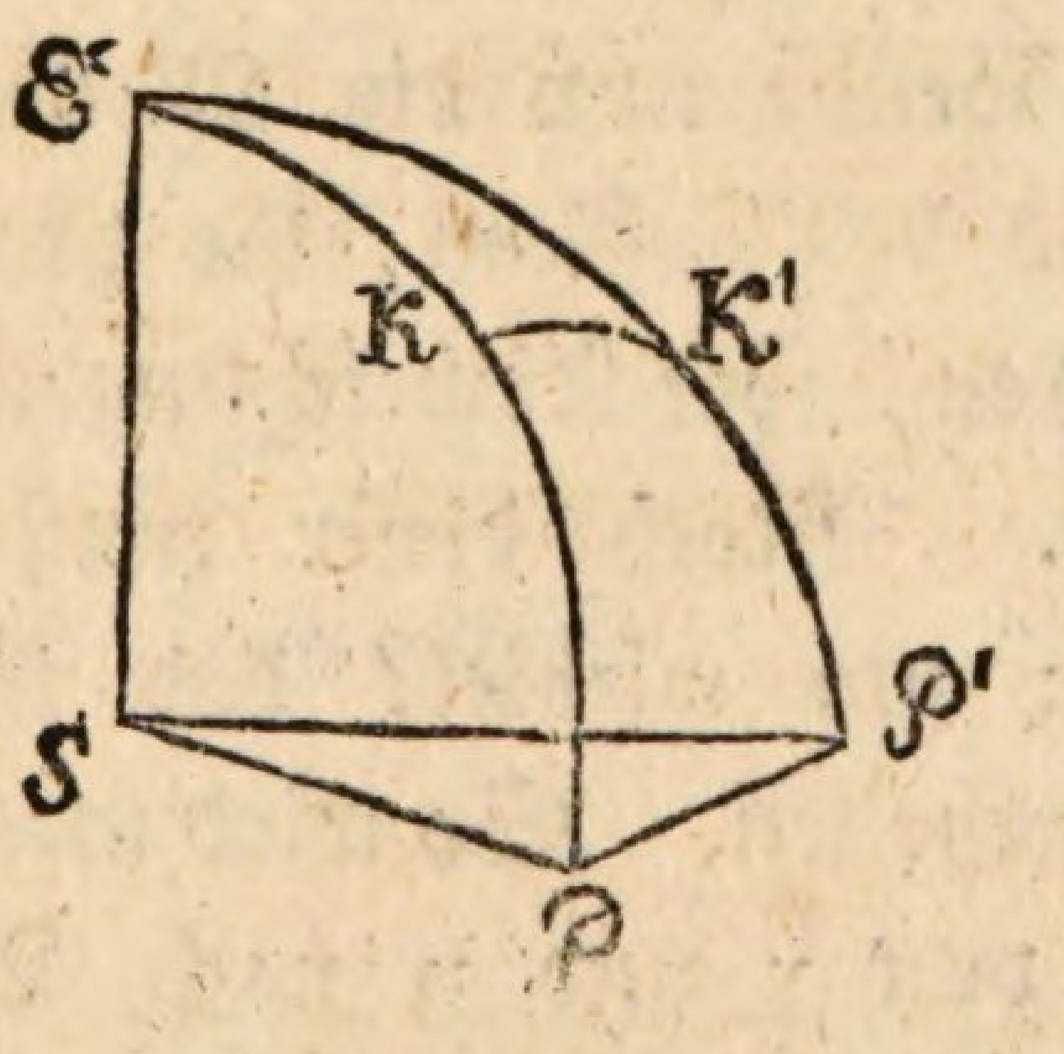
3) Aus diesen hat man nun drey Radien, die wir r, r′, r″ nennen wollen, und drey dazu gehörige Anomalien, die φ, φ', φ'' heißen mögen, wovon die negativ sind, welche vor das Perihelium

fallen; ferner sind $\varphi' - \varphi$, $\varphi'' - \varphi$ die Winkel, welche der erste Radius mit den andern beyden macht, und die u, u′ heißen sollen.

4) Man berechne nun nach 51 aus dem Gegebenen für die drey mittleren Zeitpunkte die heliocentrischen Längen des Kometen, β, β', β'', und seine heliocentrischen Breiten π, π', π''.

5) So erhellet nebenbey aus den Werthen β, β', β'', je nachdem sie in steigender oder abnehmender Progression sind, ob der Komet rechtläufig oder rückgängig sey, d. i. ob seine Bewegung nach der Ordnung der Zeichen oder gegen dieselbe sey.

6) Es seyen



K und K′ zwey Oerter des Kometen, und KP, K′P′ an der Himmelskugel die heliocentrischen Breiten π, π' derselben. Man verlängere diese Bogen bis sie sich schneiden, so geschieht das, weil sie auf der Ecliptik senkrecht stehen, im Pole E derselben, und es ist daher $EK = 90^\circ - \pi$, $EK' = 90^\circ - \pi'$, $PEP' = PP' = \beta' - \beta$. Daraus findet man im sphärischen Dreyecke KEK′

die Seite KK', die wir $= v$ setzen wollen; sie ist der Winkel, den in der Bahn des Kometen die Radien r und r' einschließen, und man hat für ihn $\text{Cos}\, v = \text{Cos}\,(\beta' - \beta)\, \text{Cos}\, \pi\, \text{Cos}\, \pi' + \text{Sin}\, \pi\, \text{Sin}\, \pi'$

7) Wenn v' eben der Winkel für die Radien r und r'' ist, so ist auch $\text{Cos}\, v' = \text{Cos}\,(\beta'' - \beta)\, \text{Cos}\, \pi\, \text{Cos}\, \pi'' + \text{Sin}\, \pi\, \text{Sin}\, \pi''$.

8) Nun sollte also $v = u$, $v' = u'$ seyn. Dies wird aber nicht genau zutreffen, wenn die berechneten Werthe von r, r', r'', so wie die von u, u', u'', noch Verbesserungen bedürfen. Man bemerke die Unterschiede, um die v, v' von u, u' abweichen.

9) Man wende nun die Methode (IV) gegenwärtig an, aus den Fehlern, die von angenommenen Größen herrühren, ihre Abweichungen von der Wahrheit zu finden. Nach dieser muß man r und u variiren lassen; um wieviel? das läßt sich aus den Umständen beurtheilen. So wird man also den wahren Werthen von r und u nach Belieben sich nähern können; und nach diesen die perihelische Distanz und den Zeitpunkt des Durchganges durch das Perihelium berechnet, wird die verlangten richtigen Resultate geben.

§. 53.

Für den oben betrachteten Kometen hat man folgende drey mittlere Beobachtungen:

1781 d. 9. Oct. $16^h\ 50', 0''$	$\alpha = 124°27'42''$	$\vartheta = 0°11'40''$
— 17. Nov. $8^h\ 29', 44''$	$\alpha' = 306°57'32''$	$\vartheta' = 44°17'12''$
— 20. Dec. $6^h\ 6', 30''$	$\alpha'' = 306°17'59''$	$\vartheta'' = 17°34'25''$

Ferner für eben diese Zeitpuncte:

geoc. Länge der Sonne	Log. des Radius R
197° 13′ 44″	9,998864
235° 55′ 43″	9,994602
269° 20′ 35″	9,992748.

1) Aus diesen Angaben findet man, wenn man das oben gefundene D benutzt: $\varphi = -61°\ 18',\ 3''$, $\varphi' = -18°\ 7'\ 12''$, $\varphi'' = 29°\ 8'\ 15''$, woraus

$u = 43°\ 10'\ 41''$, $u' = 90°\ 26'\ 18''$ wird. Ferner $\beta = 77°\ 5'\ 50''$, $\beta' = 37°\ 26'\ 37''$, $\beta'' = 346°\ 49'\ 52''$, $\pi = 0°\ 10'\ 34''$, $\pi' = 18°\ 6'\ 32''\frac{1}{2}$, $\pi'' = 27°\ 12'\ 57''$, welche $v = 42°\ 53'\ 2''$, $v' = 90°\ 9'\ 22''$ geben. Daher sind die Unterschiede $m = 17'\ 49''$, $n = 16'\ 56''$.

2) Man vermehre D um 0,003, so findet man $m' = -33', 53''$, $n' = 12'\ 54''$, und, indem man den Durchgang durch das Perihelium um $0,25^d$ zurück, also auf den 29. Nov. $17^h\ 10'\ 31''$ setzt, so erhält man $m'' = 48'\ 16''$, $n'' = 27'\ 13''$. Dies giebt, wenn alles auf Secunden gebracht wird, folgende Gleichungen:

$$3102\,p - 1829\,q = 1069,$$
$$1760\,p - 617\,q = 1016,$$

woraus p = 0,881406, q = 0,910400 gefunden wird.

3) Daher ist die Verbesserung für D = 0,003 . p = 0,0026442; diese zu dem angenommenen D=0,9583509 addirt, giebt das wahre D=0,9609951.

4) Eben so wird die Verbesserung der Zeit des Durchganges durchs Perihelium = $0{,}25^d \times q$ = $0{,}2276^d$ = $5^h 27' 42''$, also fällt die wahre Zeit auf den 29. Nov. $12^h 42' 46''$ mittlere Zeit zu Paris.

5) Aus den dreyen heliocentrischen Längen $\beta = 77^\circ 5' 50''$, $\beta' = 37^\circ 26' 37''$, $\beta'' = 346^\circ 49' 52''$ erhellet, daß der Lauf des Kometen wider die Ordnung der Zeichen sey: denn $346^\circ 49' 52''$ sagt eben so viel als — $13^\circ 10' 8''$, und die Progression ist also abnehmend.

6) Bey der Berechnung dieser Breiten (51, 5) fand eine Zweydeutigkeit statt, die sich so heben läßt: Da die beyden Werthe für β allemal sehr von einander abweichen, so geben sie auch ganz verschiedene v, wovon also eins dem u nahe kommt, das andere sehr davon verschieden ist. Natürlich kann nur das erstere v geltend seyn, und also auch nur das β, aus dem es entstand.

7) Um sich zu versichern, daß die Elemente genau genug sind, berechne man m und n, durch Variirung derselben, von neuen. So erhält man

bey eben den Aenderungen für die I und III Observation:

$\varphi = -60^\circ 56' 37''$, $\varphi'' = 29^\circ 19' 22''$

$\pi = 10', 33'' \frac{1}{2}$, $\pi'' = 27^\circ 11' 56 \frac{1}{4}''$

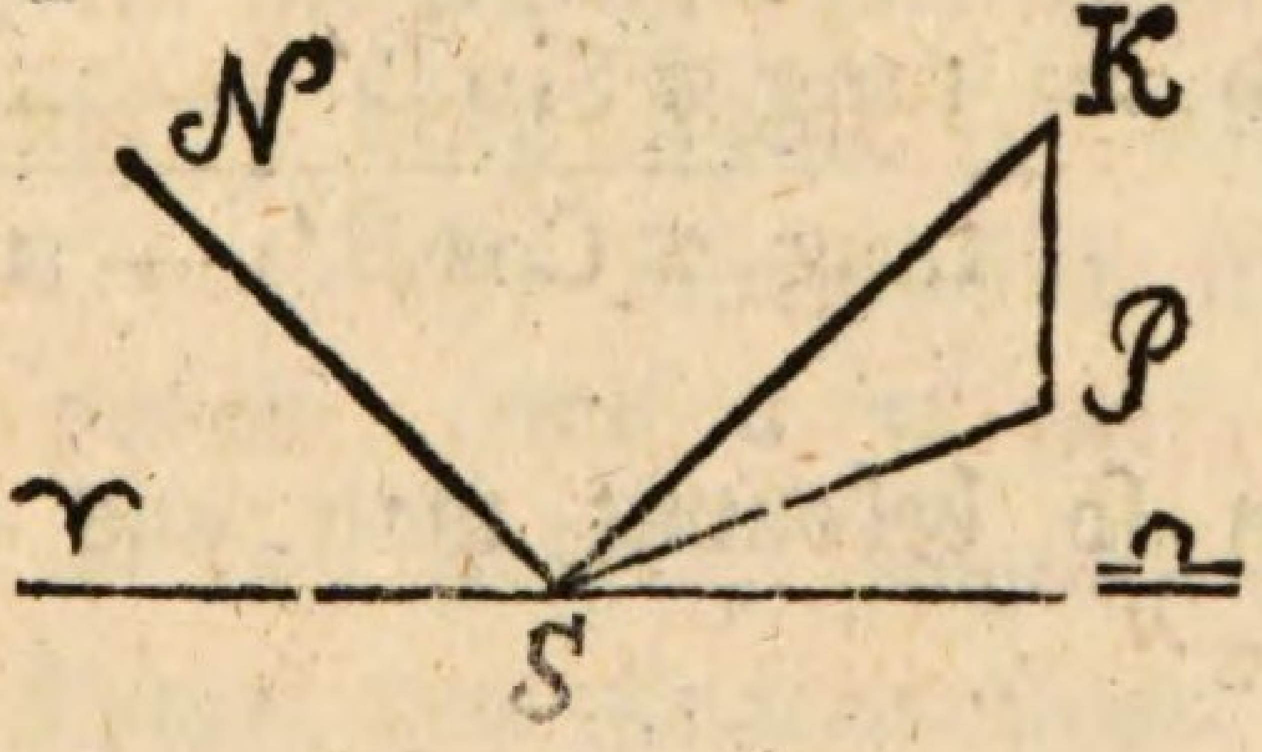
$\beta = 77^\circ 2' 22''$, $\beta'' = 346^\circ 38' 53''$

$u' = 90^\circ 15' 59''$, $v' = 90^\circ 16' 3'' \frac{1}{2}$

also $m = -4'' \frac{1}{2}$, welcher geringe Unterschied uns von der Genauigkeit der Elemente hinlänglich versichert.

§. 54.

Aufgabe. Aus den drey bekannten heliocentrischen Längen und Breiten des Kometen die Lage der Knotenlinie, und die Neigung der Bahn zu bestimmen.



Auflösung. 1) Es seyen β, β', β'' diese Längen, π, π', π'' die Breiten, ω die Länge des aufsteigenden Knoten SN, i die Neigung der Bahn. Der Komet befinde sich in K, und KP sey auf die Ecliptik senkrecht gefällt; so ist in der durch die Ebenen PSN, PSK und NSK bey S sich bildenden Ecke, die an SP rechtwinklicht ist: $KSP = \pi$, $PSN = \beta - \omega$, und der Winkel an $SN = i$,

also $\tan i = \frac{\tan \pi}{\sin(\beta - \omega)}$.

2) Eben so erhält man aus der zweyten Observation $\text{tang}\ i = \frac{\text{tang}\ \pi'}{\text{Sin}\ (\beta' - \omega)}$, und aus der dritten $\text{tang}\ i = \frac{\text{tang}\ \pi''}{\text{Sin}\ (\beta'' - \omega)}$, vorausgesetzt, daß die Bewegung des Knoten während der Zwischenzeit unbeträchtlich sey.

3) Aus den beyden erstern Gleichungen wird: $\text{tang}\ \pi\ (\text{Sin}\ \beta'\ \text{Cos}\ \omega - \text{Cos}\ \beta'\ \text{Sin}\ \omega) = \text{tang}\ \pi'\ (\text{Sin}\ \beta\ \text{Cos}\ \omega - \text{Cos}\ \beta\ \text{Sin}\ \omega)$, und durch $\text{Cos}\ \omega$ dividirt:

$$\text{tang}\ \pi\ \text{Sin}\ \beta' - \text{tang}\ \text{Cos}\ \beta'\ \text{tang}\ \omega = \text{tang}\ \pi'\ \text{Sin}\ \beta - \text{tang}\ \pi'\ \text{Cos}\ \beta\ \text{tang}\ \omega\ .$$

also: $$\text{tang}\ \omega = \frac{\text{tang}\ \pi\ \text{Sin}\ \beta' - \text{tang}\ \pi'\ \text{Sin}\ \beta}{\text{tang}\ \pi\ \text{Cos}\ \beta' - \text{tang}\ \pi'\ \text{Cos}\ \beta}.$$

4) Eben so bekommt man aus den Werthen $\beta, \beta'', \pi, \pi''$

$$\text{tang}\ \omega = \frac{\text{tang}\ \pi\ \text{Sin}\ \beta'' - \text{tang}\ \pi''\ \text{Sin}\ \beta}{\text{tang}\ \pi\ \text{Cos}\ \beta'' - \text{tang}\ \pi''\ \text{Cos}\ \beta}$$

und aus $\beta,' \beta'', \pi', \pi''$:

$$\text{tang}\ \omega = \frac{\text{tang}\ \pi'\ \text{Sin}\ \beta'' - \text{tang}\ \pi''\ \text{Sin}\ \beta'}{\text{tang}\ \pi'\ \text{Cos}\ \beta'' - \text{tang}\ \pi''\ \text{Cos}\ \beta'}$$

welche drey Formeln einander zur Probe dienen, jedoch wird von ihnen die die richtigere seyn, welche einen größern Zähler und Nenner giebt als die andern. Dies gilt auch von den erstern drey Formeln für tang i.

Anmerkung. 1) Die aus den Formeln gefundene Tangente von ω kann zu ω oder zu $180° + \omega$ gehören. Um zu bestimmen, welchen Winkel man nehmen muß, bemerke man, daß i allemal positiv ist, also auch tang i, weil zugleich $i < 90°$ ist, und daß folglich tang π und Sin $(\beta - \omega)$; tang π' und Sin $(\beta' - \omega)$ u. s. w. einerley Zeichen haben müssen. Aus dieser Bedingung kann man allemal beurtheilen, ob ω spitz oder $> 180°$ sey.

2) Wenn der Komet sich nach der Ordnung der Zeichen bewegt, so bedeutet der gefundene Winkel ω die Länge des aufsteigenden Knoten, im entgegengesetzten Falle, die des niedersteigenden: denn wenn im erstern Falle die Breite π nördlich, also positiv ist, so ist auch tang π positiv, (weil $\pi < 90°$ ist) also auch Sin $(\beta - \omega)$ positiv, folglich $\omega < \beta$; also ist der Komet den Knoten schon passirt, mithin mußte er beym Durchgange durch denselben aus südlicher Breite in die nördliche kommen, d. h. der Knoten ist aufsteigend. Ist dagegen die Breite π südlich oder negativ, so ist auch Sin $(\beta - \omega)$ negativ, also $\beta < \omega$, d. i. der Komet ist bey seiner südlichen Breite noch vor dem Knoten, und wird also durch ihn zur nördlichen übergehen, wodurch der Knoten wieder zum aufsteigenden wird. Im andern Falle, wenn der Komet rückgängig ist,

verhält sich, wie man leicht sieht, die Sache gerade umgekehrt, und man muß also hier zu ω noch $180°$ addiren, um den aufsteigenden Knoten zu erhalten.

§. 55.

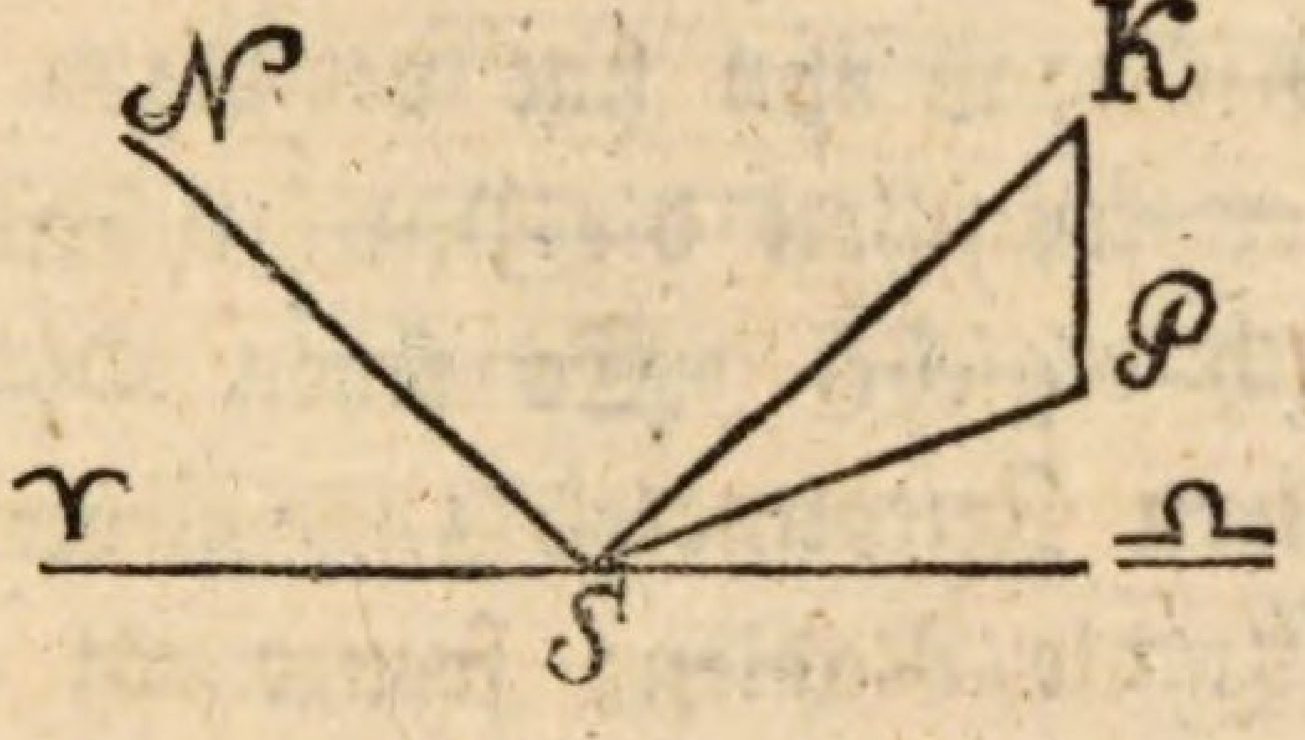
Wendet man diese letztern Formeln auf den Kometen (53) an, und gebraucht dazu die berechneten β, β'' und π, π'', so wird:

1) Log tang $\pi = 7,4873435$, log $\pi'' = 9,7108873$, log Sin $\beta = 9,9887929$, log Cos $\beta = 9,3507909$, log Sin $\beta'' = 9,3634836$, log Cos $\beta'' = 9,9880994$, also (54, 4) der Zähler $= -0,0007093 - 0,5008183 = -0,5015276$, der Nenner $= 0,0029861 - 0,1152599 = -0,1122738$, folglich tang $\omega = 4,4670047$, wozu der Winkel $77°22'55''$ und $257°22'55''$ gehören.

2) Da $\beta'' = -13°21'7''$ ist, so muß Sin $-(\omega + 13°21'7'')$ positiv, (§. 54. Anmerk.), also Sin $(\omega + 13°21'7'')$ negativ, folglich $\omega + 13°21'7'' > 180°$ seyn. Daher kann ω nicht $= 77°22'55''$ angenommen werden, sondern man muß den andern Winkel wählen. Dieser ist also die Länge des niedersteigenden Knoten, da der Komet rückgängig ist (53. 5), und folglich ist die des aufsteigenden Knoten $77°22'55''$.

3) Seine Neigung gegen die Ecliptik wird $= 27°12'4''$.

4) Zur Berechnung der Länge seines Perihe-
liums hat man



NSP = $\beta'' - \omega$ = 269° 15′ 58″, und daraus
Cos NSK = Cos NSP . Cos PSK = Cos
$(\beta'' - \omega)$. Cos π''.

$$\log \text{Cos NSP} = 8{,}1074953$$
$$\log \text{Cos } \pi'' = 9{,}9491094$$
$$\log \text{Cos NSK} = 8{,}0566047.$$

also NSK = 269° 20′ 50″; weil nemlich Cos NSP negativ, Cos π'' positiv, und also auch Cos NSK negativ ist, so muß man für NSK den Bogen nehmen, der > 180° ist.

5) Dies ist die Distanz des Kometen von seinem Knoten in seiner Bahn für die dritte Beobachtung. Fügt man hierzu die Anomalie φ'' = 29° 8′ 15″, welche er durch eine rückgehende Bewegung vom Perihelium an zurückgelegt hat, so erhält man 298° 29′ 5″ für die Distanz des Periheliums vom Knoten.

§. 56.

Aufgabe. Bey der Voraussetzung, daß die Bahn des Kometen eigentlich keine Parabel, sondern eine sehr eccentrische Ellipse sey, die Umlaufszeit zu bestimmen.

Auflösung. 1) Zu dem Ende nehme man an, es seyen 4 gute mittlere Observationen des Kometen bekannt, welche beynahe das ganze Stück seiner Bahn, so weit man ihn hat verfolgen können, umfassen, und es sey schon die Parabel bestimmt, welche aus diesen sich ergiebt. Es seyen φ, φ', φ'', φ''' die den mittlern Zeitpuncten zugehörigen Anomalien; r, r,' r'' r''' die Radien; ferner $\varphi' - \varphi = u$, $\varphi'' - \varphi = u'$, $\varphi''' - \varphi = u''$.

2) Man berechne daraus die Werthe β, β', β'', β''', und π, π', π'', π''', und aus diesen v, v', v'', v'''. Die Unterschiede $u - v$, $u' - v'$ $u'' - v''$ mögen m, m', m'' heißen.

3) Man lasse die perihel. Distanz um etwas variiren, dafür sey $u - v = n$, $u' - v' = n'$, $u'' - v'' = n''$.

4) Man lasse jene wie vorher, und verrücke den Zeitpunct, wo der Komet im Perihelium ist, um etwas Geringes. Für diese Aenderung sey $u - v = p$, $u' - v' = p'$, $u'' - v'' = p''$.

5) Endlich nehme man wieder die erstern Werthe dieser Größen, und bringe die Eccentricität e in den Calcul; doch so, daß man $1 - e$ sehr klein, z. B. $= \frac{1}{60}$ annimmt, und berechne in dieser Voraussetzung den Winkel φ. Diese Rechnung ist leicht; man darf nur zum vorigen φ den kleinen Winkel, dessen Sinus $\frac{1}{10}(1 - e) \tang \frac{1}{2}\varphi\,(4 - 3 \,\mathrm{Cos}\, \frac{1}{2}\varphi^2 - 6 \,\mathrm{Cos}\, \frac{1}{2}\varphi^4)$ ist, hinzufügen (35.)

6) Eben so berechne man r von neuen aus der

Gleichung $r = \frac{D}{\text{Cos}\,\frac{1}{2}\,\varphi^2}\left(1 - \frac{1-e}{2}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\varphi^2\right)$ (33), und auf gleiche Weise suche man die Aenderungen, welche φ', r'; φ'', r'' u. s. f. erleiden, woraus man wieder etwas andere u, u', u'', v, v', v'' erhält. Man setze $u - v = q$, $u' - v' = q'$, $u'' - v'' = q''$.

7) Man nenne ψ, χ, ω die Multiplicatoren, womit die hypothetischen Aenderungen multiplicirt werden müssen, um die wahren Abweichungen zu erhalten, so hat man, wie sich leicht durch Fortsetzung des Calculs IV, 7 finden läßt:

$$\psi\,(n - m) + \chi\,(p - m) + \omega\,(q - m) + m = 0$$

$$\psi\,(n' - m') + \chi\,(p' - m') + \omega\,(q' - m') + m' = 0$$

$$\psi\,(n'' - m'') + \chi\,(p'' - m'') + \omega\,(q'' - m'') + m'' = 0.$$

woraus ψ, χ, und ω gefunden werden.

8) Dies giebt also die wahren Werthe der perihelischen Distanz, der Zeit des Durchgangs durchs Perihelium, und der Größe $1 - e$. Es sey D erstere, so findet man a, die halbe große Axe der Bahn aus der Formel $a = \frac{D}{1-e}$, und daraus die siderische Umlaufszeit $2\pi a^{\frac{3}{2}}$, oder (da die Einheit davon $\frac{T}{2\pi}$ ist, wenn T das Sonnenjahr für unsre Erde bedeutet) $= a^{\frac{3}{2}}$, in Jahren gerechnet.

§. 57

Läßt sich von einem Kometen ein so großes Stück seiner Bahn nicht beobachten, so ist diese Rechnung allemal unsicher. Aber auch selbst bei den günstigsten Umständen darf man auf sie nicht zu viel bauen, weil ein sehr geringer Fehler in 1 — e, auf a einen ungemein großen Einfluß hat. Am sichersten bleibt also die Methode, die Geschichte der Kometen zu Rathe zu ziehen und Vergleichungen anzustellen.

So entdeckte Halley, daß der Komet von 1682 mit denen der Jahre 1607, 1531 und 1456 einerley seyn müsse und schloß daraus auf eine Rückkehr binnen 75 Jahren. Doch schätzte er seine Angabe nicht genauer, als innerhalb den Grenzen eines Jahres, weil er nahe beym Jupiter vorbeigehen, und von diesem beträchtliche Aenderungen in seinem Laufe leiden mußte. Hr. Clairaut berechnete daher diese Störungen, und bestimmte auf einen Monat genau die Dauer seines nächsten Umlaufs. Nach dieser Rechnung mußte der Komet den 13. April 1759 durch das Perihelium gehen. Es geschah den 12. März. Diese Differenz vermindert sich nach Hrn. de la Place bis auf 10 Tage, wenn man in Clairaut's Formeln die Massen Jupiters und Saturns verbessert, welche ums Jahr 1759 noch nicht genau bekannt waren.

Zwei-

Zweyter Theil.

Von

der elliptischen

Figur der Planeten.

Vorerinnerung.

Es gereicht Hrn. de la Place, wie jedem andern großen Mathematiker, gewiß zu keinem Vorwurfe, daß er die Faßlichkeit dem höhern Zwecke, die Grenzen der Wissenschaft zu erweitern, aufopfert; allein eben darinn liegt doch auch der Grund, warum seine Schriften nicht so häufig gelesen werden, als es ihr hoher Werth erwarten ließe. Indem er sich allenthalben neue Wege bahnt, bauet er seine Schlüsse nicht selten auf Voraussetzungen, die vielleicht nur wenigen seiner Leser bekannt sind, und benimmt Ungeübtern durch weggelassene Hinweisungen auch selbst die Mittel, wodurch sie sich helfen könnten.

Diese Schwürigkeiten vermehrt noch sein unentwickelter Vortrag, der für Anfänger wenigstens fast durchgängig einer weitern Auseinandersetzung bedarf, und die Maxime, alles wo möglich in die Grenzen der reinen Analysis zu zwängen, wobey es dem Leser überlassen bleibt, die nöthigen Figuren sich hinzu zu denken. Gleichwol enthalten die Schriften dieses Mannes so ungemein viel Lehrreiches, und seine Analysis besitzt in so hohem Grade jene Einfachheit, die nur allein das ächte Kennzeichen wissenschaftlicher Vollendung ist, daß wer sich die Mühe giebt, jene Schwierigkeiten zu bekämpfen, unverhältnißmäßig reich dafür belohnt wird.

Sollten also die Lehren des Hrn. de la Place bloß durch seinen Vortrag für manchen ein geheimnißvolles Ansehen bekommen, so wäre es doch, dünkt mich, einiges Verdienst, ihnen diesen nachtheiligen Schleyer zu rauben, und durch enthüllte Darstellung sie gemeinnütziger zu machen. Man sehe gegenwärtige Arbeit als einen Versuch dieser

Art an; in wiefern er gelungen seyn mag, überlasse ich dem Urtheile der Kenner und der Zeit. Ich wählte aus der Menge von Schriften, die wir von Hrn. de la Place haben, gerade diese, weil sie in einem geringen Volumen so viele wichtige Materien umfaßt, und man Versuche doch immer gern im Kleinen zuerst anstellt. Vorzüglich ist dieser zweyte Theil recht dazu geeignet, mit dem Geiste der Analysis des Hrn. de la Place vertraut zu werden. Er enthält die fruchtbarste Anwendung einer Lehre, um die er sowol in Absicht der Ausbildung, als des glücklichen Gebrauchs, den er von ihr macht, gleich großes Verdienst hat; ich meyne die Theorie der partiellen Differenziale. Da sie von andern Schriftstellern bisher nur sehr sparsam benutzt ward, und deshalb nicht zu den gewöhnlichen Kunstgriffen des Calculs gehört, so habe ich mich vorzüglich bemühet, das Nöthige darüber gehörig ins Licht zu setzen. Ueberhaupt sind alle Quellen der Dunkelheit weggeräumt, ohne daß dadurch das Werk im Ganzen eine größere Ausdehnung bekom-

men hätte, welches nur durch eine gänzliche Umänderung der Ordnung und des Vortrags möglich wurde. Wenn ich übrigens hie und da manche eigene Zusätze hineingebracht habe, so wird sich diese Freyheit, denke ich, zu den Vorrechten einer Umarbeitung zählen lassen.

J. J. A. Ide.

Einige zu den Untersuchungen dieses zweyten Theiles erforderliche Hülfssätze.

§. 1.

Eine Function von zweyen veränderlichen Größen x und i drücke man durch F (x, i) aus, wo das voranstehende Zeichen wieder wie vorhin den Charakter der Function andeuten soll. Wir wollen setzen, man habe dieser Bezeichnung gemäß: $\left(\frac{dF(x,i)}{di}\right) = f(x,i)$, so ist auch: $\left(\frac{dF(a,i)}{di}\right) = f(a,i)$, d. h. es ist einerley, ob man vor dem Differenziiren der Function nach i, oder nach demselben für x einen bestimmten Werth a setzt.

Indem man nemlich F (x, i) in Bezug auf i differenziirt, wird x als beständige Größe behandelt, und man kann also a statt x setzen, ohne daß dadurch das Differenziiren einen andern Gang nähme.

§. 2.

Setzt man der Kürze wegen die Function von x und i = P, so ist

$$\left(\frac{d\int P dx}{di}\right) = C + \int\left(\frac{dP}{di}\right) dx,$$

oder es ist einerley, ob man die Function erst nach x integrirt, und dann nach i differenziirt, oder dies in verkehrter Ordnung thut; nur daß, wenn die Integration zuletzt geschieht, der Natur des Integrirens gemäß, noch eine Constante hinzukommt.

Beweis. 1) Man setze das Integral $\int P dx = Q$, so ist Q ebenfalls eine Function von x und i, und man hat daher, wie bekannt ist, folgende Gleichung:

$$\left[\frac{d\left(\frac{dQ}{di}\right)}{dx}\right] = \left[\frac{d\left(\frac{dQ}{dx}\right)}{di}\right];$$

aus der man durch Integration in Bezug auf x erhält: $\left(\frac{dQ}{di}\right) = C + \int\left[\frac{d\left(\frac{dQ}{dx}\right)}{di}\right] dx.$

2) Da $Q = \int P dx$, so wird $\left(\frac{dQ}{dx}\right) = P.$

Dies statt Q und $\left(\frac{dQ}{dx}\right)$ in voriger Gleichung substituirt, giebt:

$$\left(\frac{d\int P dx}{di}\right) = C + \int\left(\frac{dP}{di}\right) dx.$$

§. 3.

Dieser Satz bleibt selbst für bestimmte Werthe der Integrale wahr; es sey nemlich $\int P dx$, von

$x = a$ bis $x = b$ genommen, $= H$, so ist $\int\left(\frac{dP}{di}\right)dx$, von $x = a$ bis $x = b$ genommen, $= \frac{dH}{di}$.

Beweis. 1) Man setze $\int P dx = F(x, i)$, und $\left(\frac{dF(x, i)}{di}\right) = f(x, i)$, so ist (2) $\int\left(\frac{dP}{di}\right)dx$ $= C + f(x, i)$, und von $x = a$, bis $x = b$ genommen, $= f(b, i) - f(a, i)$.

2) Nun ist ferner $H = F(b, i) - F(a, i)$, also (1) $\frac{dH}{di} = f(b, i) - f(a, i)$, also einerley mit dem besondern Werthe von $\int\left(\frac{dP}{di}\right)dx$.

Anmerkung. 1) Eine wesentliche Bedingung hierbey ist, daß die Größen a und b kein i enthalten: denn in diesem Falle bekommt das Integral, nach der Substitution, in Bezug auf i eine ganz andere Gestalt, und die Schlüsse, worauf der Satz gebauet ist, fallen weg. Um dies durch ein leichtes Exempel zu zeigen, sey $P = ix$, so ist $\int P dx = \frac{1}{2} i x^2 + C$, welches von $x = k - i$ bis $x = k + i$ genommen, $H = 2i^2k$, und $\frac{dH}{di} = 4ik$ giebt. Dagegen wird $\left(\frac{dP}{di}\right) = x$, also $\int\left(\frac{dP}{di}\right)dx$

$= \frac{1}{2}x^2 + C$, und eben so genommen $= \frac{1}{2}(k+i)^2 - \frac{1}{2}(k-i)^2 = 2ik$, folglich nur die Hälfte vom Erstern. Andere Erfordernisse, z. B., daß x und i von einander unabhängig seyn müssen, bedürfen wol keiner Erinnerung.

2) Man sieht leicht, daß der Satz auch auf doppelte und mehrfache Integrale sich ausdehnen lasse, wofern nur die Integrationen nach den verschiedenen veränderlichen Größen unabhängig von einander sind. Wäre z. B. P eine Function von x, y, z und i, so hätte man $\int dz \left(\frac{dP}{di}\right)$ $= \left(\frac{d\int P dz}{di}\right)$, also $\int dy \int dz \left(\frac{dP}{di}\right)$ $= \int dy \left(\frac{d\int P dz}{di}\right) = \left(\frac{d\int dy \int P dz}{di}\right)$ und zuletzt $\int dx \int dy \int dz \left(\frac{dP}{di}\right) = \int dx \left(\frac{d\int dy \int P dz}{di}\right)$ $= \left(\frac{d\int dx \int dy \int P dz}{di}\right)$. Auf eben die Weise läßt sich auch nach 3 zeigen, daß dies alles noch wahr bleibe, wenn man nach den einzelnen Integrationen den Größen z, y und x besondere Werthe beylegt.

§. 4.

Die Function Fu enthalte außer u, noch die Größe a in sich, und sey von solcher Beschaffen-

heit, daß sie für $u = e$, Null werde, so verschwinden auch $\left(\frac{dFu}{da}\right)$ und $\int daFu$ für eben diesen Werth von u, wofern letzteres Integral so genommen wird, daß es für irgend ein $a = o$ ist.

1) Es ist $Fe = F(u + e - u) = Fu + (e - u)F'u + \frac{(e-u)^2}{1 \cdot 2} F''u + \frac{(e-u)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} F'''u$ + u. s. f. (1. Theil I, 2). Da nun vermöge der Bedingung $Fe = o$ ist, so wird:

$$Fu = -(e-u)F'u - \frac{(e-u)^2}{1 \cdot 2} F''u - \frac{(e-u)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} F'''u \text{ u. s. f.}$$

2) Die Function enthält also in diesem Falle allemal den Factor $e - u$, und läßt sich folglich durch $(e - u) fu$ ausdrücken. Demnach wird $\left(\frac{dFu}{da}\right) = (e-u)\left(\frac{dfu}{da}\right)$ welches für $u = e$ ebenfalls verschwindet.

3) Ferner wird $\int daFu = (e - u) \int dafu$, wo keine Constante hinzugefügt werden braucht, wenn man nur die Integrale auf beyden Seiten so nimmt, daß sie für irgend ein a verschwinden. Also enthält auch $\int daFu$ hier jedesmal den Factor $e - u$, und wird folglich $= o$, wenn man $u = e$ setzt.

§. 5.

Es sey V eine Function von u und v, so ist jederzeit: $\int dv \int V du = \int du \int V dv$, wofern in beyden Fällen die Integrale so genommen werden, daß sie für $u = e$, und $v = f$ verschwinden, je nachdem in Bezug auf u oder v integrirt ist.

Beweis. 1) Man setze $\int V du = U$, so wird U eine Function von u und v seyn, welche der Bedingung gemäß für $u = e$ verschwindet. Ferner sey $\int U dv = W$, und zwar so genommen, daß es für $v = f$, Null werde.

2) Letzteres giebt $U dv \overset{v}{=} dW$, und $U = \left(\frac{dW}{dv}\right)$ $= \int V du$, folglich $V = \left(\frac{dU}{du}\right) = \left[\frac{d\left(\frac{dW}{dv}\right)}{du}\right]$.

3) Nun aber ist bekanntlich: $\left[\frac{d\left(\frac{dW}{dv}\right)}{du}\right]$ $= \left[\frac{d\left(\frac{dW}{du}\right)}{dv}\right]$, also auch $V = \left[\frac{d\left(\frac{dW}{du}\right)}{dv}\right]$, und daher, indem man in Bezug auf v integrirt $\left(\frac{dW}{du}\right) = C + \int V dv$.

4) Der Bedingung nach, soll $\int V dv$ für $v = f$

verschwinden; eben dies gilt von W (1), also auch von $\left(\frac{dW}{du}\right)$ (4), folglich wird C = o, und man hat also $\left(\frac{dW}{du}\right) = \int V dv$.

5) Daher wird ferner, indem man in Bezug auf u integrirt: $W = C + \int du \int V dv$ und es kommt nur noch darauf an, ob beyde Integrale für $u = e$ verschwinden.

6) Von dem Integrale $\int du \int V dv$ ist dies Bedingung, und was W anbetrifft, so ist $W = \int U dv$, also wird es ebenfalls für $u = e$ zu Null, weil U für diesen Werth von u verschwindet. (4) Folglich ist wieder C = o, oder $W = \int du \int V dv$.

7) Nun ist $W = \int dv . U = \int dv \int V du$, folglich:

$$\int dv \int V du = \int du \int V dv.$$

§. 6.

Man sieht leicht, daß diese Gleichheit noch statt finden werde, wenn nach jedesmaliger Integration für u oder v bestimmte Werthe gesetzt werden; nur müssen es in beyden Fällen dieselben seyn. Gesetzt nemlich, man hat in dem Integrale $\int V du$, $u = a$ genommen, so ist $\int V du$ noch eben die Function von v und a, die sie vorhin von v und u war, also fällt die zweyte Integration, in der u als beständig genommen wurde, um nichts anders aus,

als wenn man u hätte stehen lassen. Wird daher nach derselben $v = b$ gesetzt, so entsteht eben die Größe, als wenn man am Ende zugleich $u = a$ und $v = b$ gesetzt hätte. Ein Gleiches gilt von $\int du \int V dv$, also bleiben beyde Integral-Größen für diese besondern Werthe von u und v noch einander gleich; nur darf wieder der Werth für u kein v, und der für v kein u enthalten, weil u und v unabhängig von einander seyn müssen.

§. 7.

Es bezeichne fx^2 eine Function von x^2, und das Integral $\int dx fx^2$ von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen, sey $= A$; von $x = 1$ bis $x = -1$ genommen $= B$, so ist $B = -2A$.

Beweis. 1) Es sey $\int dx fx^2 = C + Fx$, so wird, wenn das Integral für $x = 0$ verschwinden soll, $C = - F0$, und folglich erhält man, wenn man $x = 1$ setzt: $A = F1 - F0$. Eben so wird $C = - F1$, wenn das Integral für $x = 1$ Null seyn soll; also bekommt man, wenn man $x = -1$ setzt, $B = F(-1) - F1$.

2) Nun ist $Fx = F0 + xF'0 + \frac{x^2}{1 \cdot 2} F''0 + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} F'''0$ u. s. f., wenn man die Differenziale von Fx durch $F'x$, $F''x$ u. s. f. bezeichnet, und $F'0$, $F''0$ . . ihre Werthe für $x = 0$

seyn läßt. Setzt man nun $x = 1$, so erhält man:

$$F1 = F0 + F'0 + \frac{F''0}{1 \cdot 2} + \frac{F'''0}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

und für $x = -1$, $F(-1) = F0 - F'0 + \frac{F''0}{1 \cdot 2} - \frac{F'''0}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$ also wird $B = F(-1) - F1 = -2\left(F'0 + \frac{F'''0}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{F'''''0}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots\right)$ und $A = F1 - F0 = F'0 + \frac{F''0}{1 \cdot 2} + \frac{F'''0}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$ u. s. f.

3) Aber da $F'x = fx^2$, so ist $F''x = \frac{dfx^2}{dx} = f'x^2 \cdot \frac{dx^2}{dx} = 2xf'x^2$; $F'''x = 2f'x^2 + 4x^2f''x^2$, $F''''x = 4xf''x^2 + 8xf''x^2 + 8x^3f'''x^2 = 12xf''x^2 + 8x^3f'''x^2$ u. s. f. Also enthalten die Differenziale von gerader Ordnung $F''x$, $F''''x$ u. s. f. den Factor x, und werden folglich für $x = 0$, ebenfalls $= 0$, so daß diese Glieder aus der Reihe für A herausfallen. Man hat daher $A = F'0 + \frac{F'''0}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$, welche Reihe mit der für B verglichen, $B = -2A$ giebt.

Exempel. Bekanntlich ist $\int \frac{dx}{1 + x^2} = C$

$+ \text{arc tang } x$. Nimmt man dies Integral von $x = 0$ bis $x = 1$, so bekommt man $A = \frac{1}{4}\pi$, und von $x = 1$, bis $x = -1$ genommen, erhält man, weil $C = -\frac{1}{4}\pi$ wird, $B = -\frac{1}{2}\pi$, folglich $B = -2A$.

§. 8.

Wenn P eine rationale Function von Sin p und Cos p^2 ist, so ist das Integral $\int \text{Cos}\, p\, P\, dp$, von $p = 0$ bis $p = 180^\circ$ genommen, $= 0$.

Beweis. 1) Man setze $P = F(\text{Sin}\, p\, \text{Cos}\, p^2)$, und das Integral $\int \text{Cos}\, p\, P\, dp = C + fp$. Da dasselbe für $p = 0$ verschwinden soll, so wird $C = -f0$, und wird dann $p = 180^\circ$ gesetzt, so hat man $f180^\circ - f0$ für den Werth des Integrals von $p = 0$ bis $p = 180^\circ$.

2) Es sey $p = 90^\circ - t$, so bekommt man $\text{Cos}\, p = \text{Sin}\, t$, $\text{Sin}\, p = \text{Cos}\, t$ und $dp = -dt$, also wird $P = F(\text{Cos}\, t, \text{Sin}\, t^2)$ und $\text{Cos}\, p\, P\, dp = -\text{Sin}\, t\, dt\, F(\text{Cos}\, t\, \text{Sin}\, t^2)$. Wird nun auf beyden Seiten integrirt, und $\int \text{Sin}\, t\, dt\, F(\text{Cos}\, t\, \text{Sin}\, t^2) = \varphi t$ gesetzt, so erhält man: $C + fp = C' - \varphi t$.

3) Es sey für $t = 0$, die rechte Seite $= 0$, so daß $C' = \varphi 0$ sey, so muß auch die linke Seite $= 0$ werden. Da nun für $t = 0$, $p = 90^\circ$ ist, so giebt dies $C = -f90^\circ$, also hat man: $fp - f90^\circ = \varphi 0 - \varphi t$.

4) Man

4) Man setze jetzt $t = 90°$, so wird $p = 0$, und dadurch die Gleichung zu folgender: $f0 - f90° = \varphi 0 - \varphi 90°$.

5) Nun sey weiter $p = 90° + u$, so wird $\text{Sin}\, p = \text{Cos}\, u$, $\text{Cos}\, p = - \text{Sin}\, u$, $dp = du$ also $P = F(\text{Cos}\, u, \text{Sin}\, u^2)$ und $\text{Cos}\, p\, P dp = - \text{Sin}\, u\, du\, F(\text{Cos}\, u, \text{Sin}\, u^2)$, also da $\int \text{Sin}\, u\, du\, F(\text{Cos}\, u, \text{Sin}\, u^2) = \varphi u$ ist, so hat man wiederum $C + fp = C' - \varphi u$.

6) Man lasse für $u = 0$ die rechte Seite verschwinden, so wird $C' = \varphi 0$, und da für $u = 0$, $p = 90°$ wird, so muß für diesen Werth von p auch die linke Seite verschwinden, und es wird also $C = - f90°$, folglich $fp - f90° = \varphi 0 - \varphi u$.

7) Setzt man jetzt $u = 90°$, so wird $p = 180°$ und man erhält $f180° - f90° = \varphi 0 - \varphi 90°$. Dies mit n 4 verglichen, giebt: $f0 - f90° = f180° - f90°$, oder $f180° - f0 = 0$ (1).

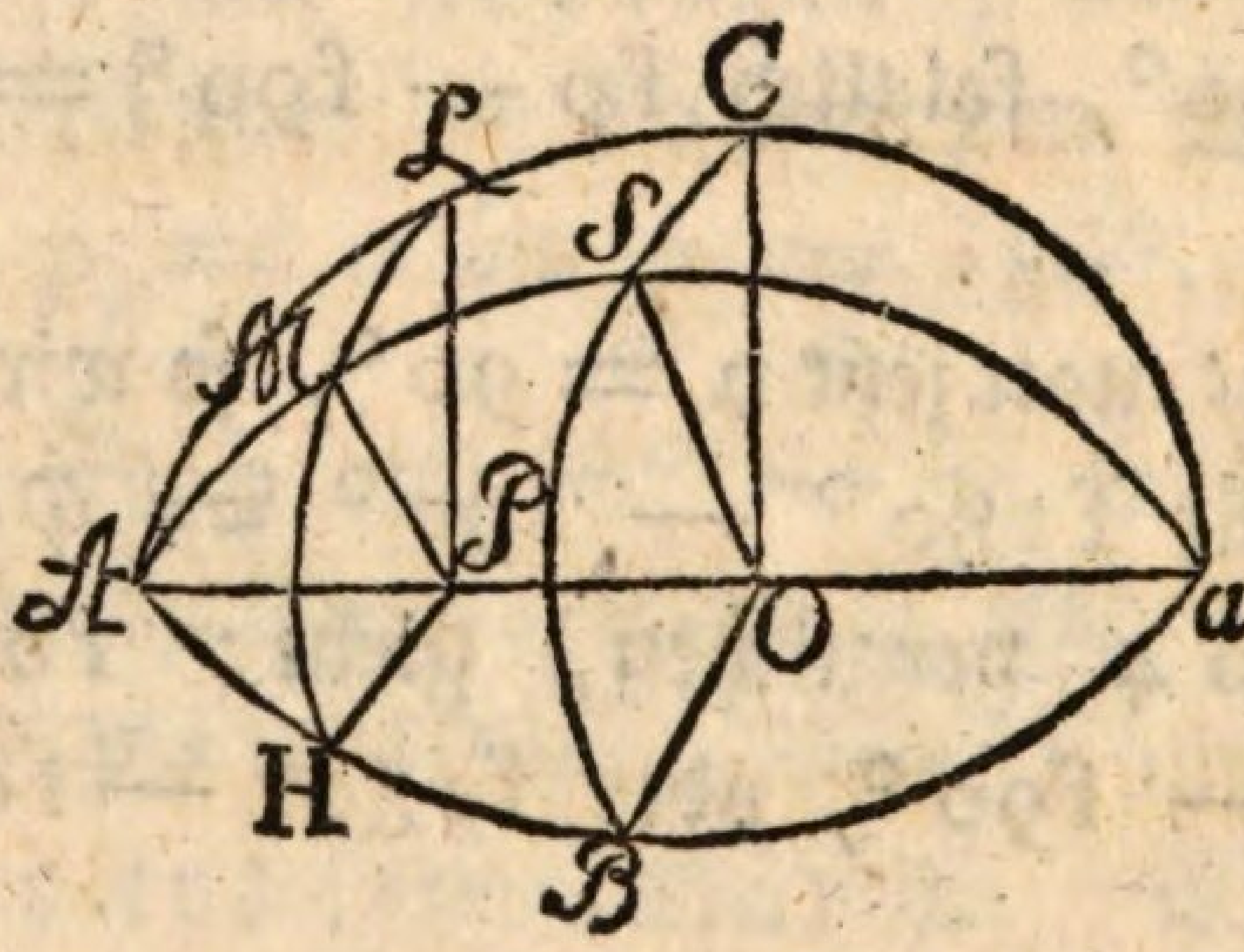
Anmerkung. Diese Methode, besondere Werthe eines Integrals zu bestimmen, ist weit umfassend, und auf ihr beruhen fast alle die Vortheile, die die Synthesis beym Summiren der Elemente gewährt. Sie allgemein darzustellen, wäre wider den Zweck, den wir hier uns vorsetzen.

Geometrische Eigenschaften des elliptischen Sphäroids.

§. 1.

Unter einem elliptischen Sphäroid versteht man jeden Körper, dessen Oberfläche durch die Gleichung $x^2 + my^2 + nz^2 = k^2$ zwischen drey rechtwinklichten Coordinaten x, y und z bestimmt wird. Aus dieser wollen wir seine Gestalt, und seine vorzüglichen geometrischen Eigenschaften, so viel zur Einsicht der folgenden Untersuchungen nöthig seyn wird, im Kurzen herleiten.

§. 2.



Es seyen OA, OB, und OC die drey Axen, worauf die Coordinaten x, y und z sich beziehen, so erhellet, daß alle Puncte M der Oberfläche, für welche z = MQ = o ist, in der Ebene AOB liegen, und also die Curve bestimmen, welche die Oberfläche mit der Ebene AOB gemein hat, d. i. den Schnitt der Oberfläche durch diese Ebene. Die

Gleichung für diesen Schnitt ist also $x^2 + my^2 = k^2$, oder $y^2 = \frac{k^2}{m} - \frac{x^2}{m}$, welche offenbar einer Ellipse zugehört, deren halbe Axen k und $\frac{k}{\sqrt{m}}$ sind. Eben so, da PQ = y die Entfernung des Punctes M der Oberfläche von der Ebene AOC bestimmt, liegen alle Puncte, für welche y = o ist, in der Ebene AOC, und bilden den Schnitt der Oberfläche mit dieser Ebene. Die Gleichung für diesen Schnitt ist daher $x^2 + nz^2 = k^2$, und stellt wiederum eine Ellipse dar, deren halbe Axen k und $\frac{k}{\sqrt{n}}$ sind.

Endlich bekommt man, wenn man x = o setzt, die Gleichung $my^2 + nz^2 = k^2$ für die Curve, welche in der Oberfläche und der Ebene BOC zugleich liegt, und auch dieser Schnitt ist, wie man sieht, eine Ellipse, deren halbe Axen $\frac{k}{\sqrt{m}}$ und $\frac{k}{\sqrt{n}}$ sind.

§. 3.

Die Schnitte des Sphäroids, welche einem von den dreyen Schnitten AOB, AOC oder BOC parallel sind, sind ebenfalls Ellipsen, welche dem, womit sie parallel laufen, ähnlich sind.

Beweis. 1) Man betrachte in der Gleichung die Ordinate z als unveränderlich, so bekommt man die Gleichung $x^2 + my^2 = k^2 - nz^2$ zwischen x und y für diejenigen Punkte der Oberfläche, welche von der Ebene AOB um MP = z entfernt sind, und folglich in einer Ebene liegen die mit AOB parallel ist. Diese Punkte gehören also zu einem Schnitte des Sphäroids, welcher durch die Ebene entsteht, die mit AOB parallel, und von ihr um MP = z entfernt ist, und da x und y die Koordinaten für diesen Schnitt sind, so gehört die Gleichung desselben, $x^2 + my^2 = k^2 - nz^2$ einer Ellipse zu, deren halbe Axen $\sqrt{(k^2 - nz^2)}$ und $\sqrt{\left(\frac{k^2 - nz^2}{m}\right)}$ sind. Das Verhältniß derselben ist $1 : \sqrt{\frac{1}{m}}$, also einerley mit dem Verhältnisse AO : BO der halben Axen der Ellipse AOB, welcher jener Schnitt parallel liegt, woraus die Aehnlichkeit beyder erhellet.

2) Nimmt man ferner y als beständig an, so erhält man die Gleichung $x^2 + nz^2 = k^2 - my^2$ zwischen den Koordinaten x und z eines Schnittes, welcher durch eine Ebene entsteht, die mit der Ebene AOC parallel, und in der Entfernung PQ = y von ihr liegt. Dieser Schnitt ist also gleichfalls eine Ellipse, und ihre halben Axen $\sqrt{(k^2 - my^2)}$ und $\sqrt{\left(\frac{k^2 - my^2}{n}\right)}$ haben eben das Verhält-

niß zu einander, wie die der Ellipse AOC, nemlich AO und CO; weshalb auch hier Aehnlichkeit zwischen beyden statt findet.

3) Endlich hat man, indem man x als beständig annimmt, die Gleichung $my^2 + nz^2 = k^2 - x^2$ zwischen den Koordinaten y und z für den Schnitt, welcher in der Entfernung $OP = x$ von BOC mit dieser Ebene parallel geschieht. Auch dieser ist, wie die Gleichung giebt, eine Ellipse und seine halben Axen sind $\sqrt{\left(\frac{k^2 - x^2}{m}\right)}$ u. $\sqrt{\left(\frac{k^2 - x^2}{n}\right)}$, welche das Verhältniß $\sqrt{\frac{1}{m}} : \sqrt{\frac{1}{n}}$ zu einander haben, welches wiederum mit dem Verhältniß der Axen BO und CO der Ellipse BOC übereinkommt, daher auch hier die Aehnlichkeit zwischen beyden erhellet.

§. 4.

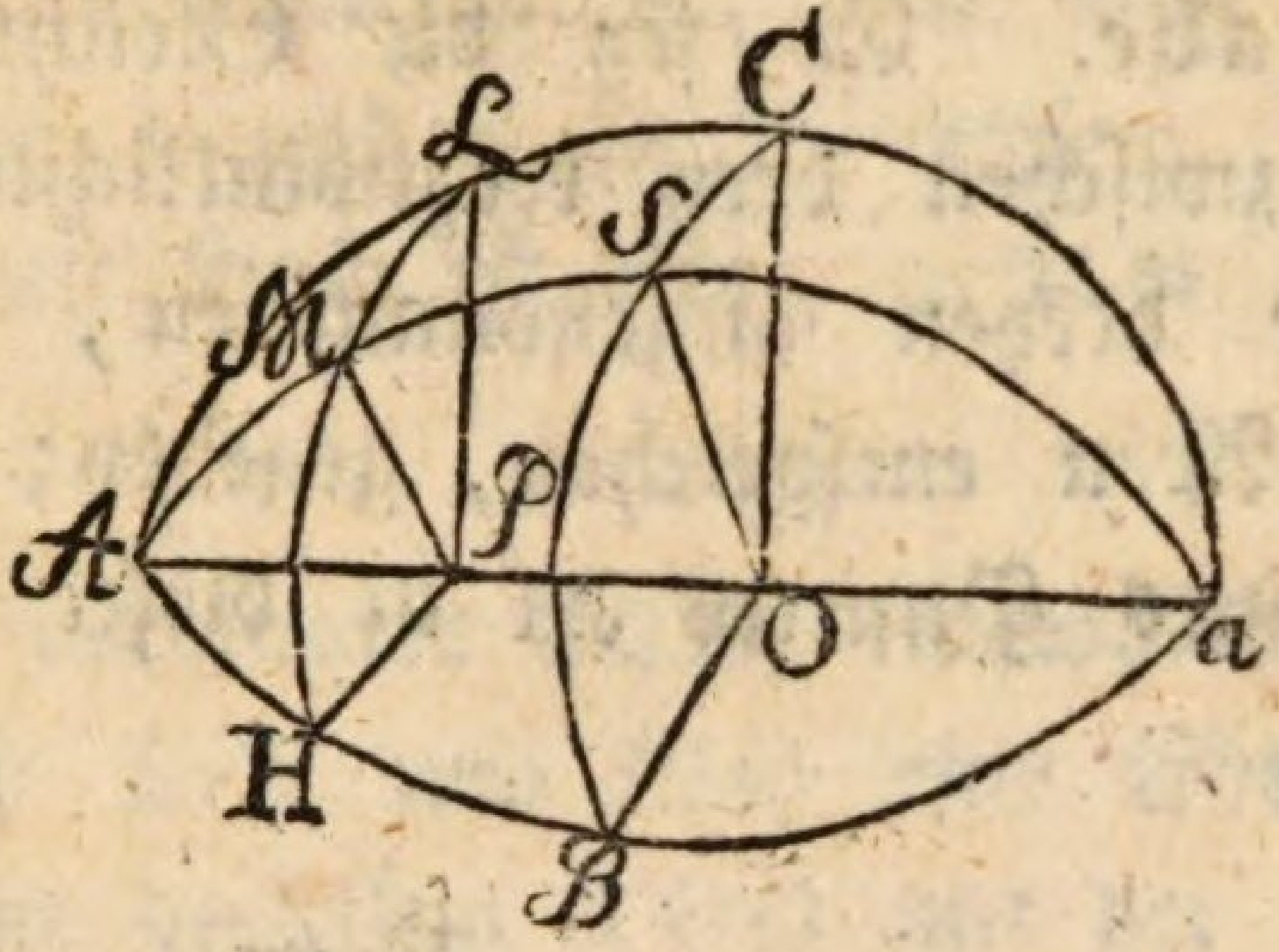
Für $x = \mp k$ werden die Axen des mit der Ebene BOC parallelen Schnittes beyde = 0, und folglich wird in dieser Entfernung das Sphäroid von der Ebene nicht geschnitten, oder die Ebene mit BOC in der Entfernung AO von O parallel gelegt, liegt ganz außerhalb dem Sphäroiden, und berührt ihn bloß im Puncte A. Eben so werden für $y = \mp \frac{k}{\sqrt{m}}$ die Axen des mit AOC paralle-

len Schnittes = o, und eine Ebene durch B mit AOC parallel gelegt, berührt ebenfalls das Sphäroid im Puncte B. Ein Gleiches gilt von einer durch C mit der Ebene AOB parallel gelegten Ebene, so daß also das Sphäroid von sechs Ebenen rings umher eingeschlossen wird. Da diese Ebenen einen bestimmten Raum einschließen, so erhellet, daß das Sphäroid innerhalb eines begrenzten Raumes liege.

§. 5.

Da für ein gleiches und entgegengesetztes x die Axen des mit BOC parallelen Schnittes dieselben sind, so folgt, daß durch Ebenen die in gleicher Entfernung von O auf beyden Seiten mit BOC parallel gelegt werden, gleiche und ähnliche Schnitte entstehen, und folglich das ganze Sphäroid durch die Ebene der Axen BO und CO in gleiche und ähnliche Hälften getheilt werde, welches sich auf gleiche Weise von den Ebenen AOC und AOB zeigen läßt. Wegen dieser Eigenschaft der drey Axen AO, BO und CO nennt man sie die Hauptaxen des Sphäroids und den Punct O, worinn sie einander senkrecht durchschneiden, den Mittelpunct desselben.

§. 6.

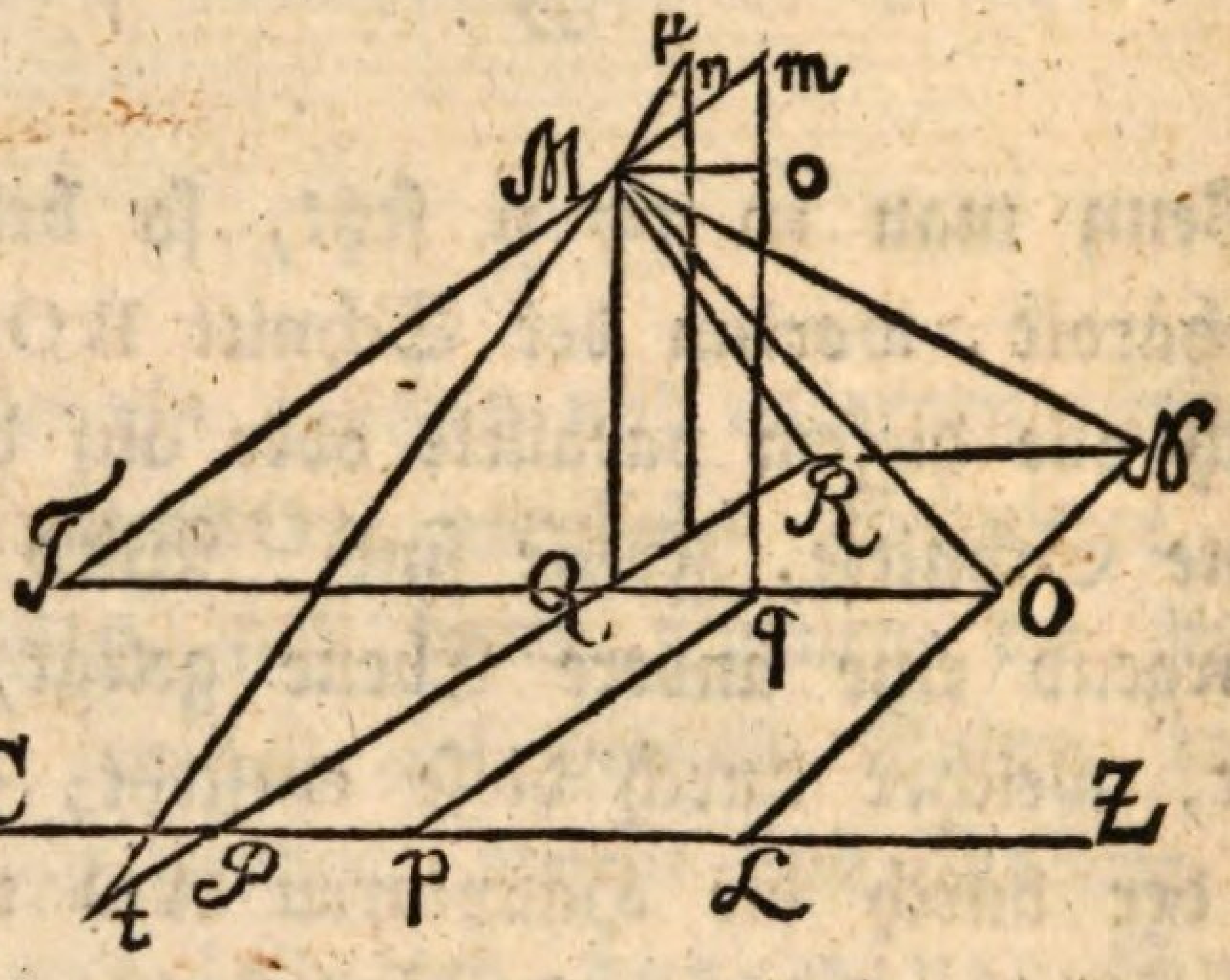


Wenn man m = n setzt, so bekommt man ein Sphäroid, worinn der Schnitt BOC, und folglich auch alle diesem parallele oder auf der Axe AO senkrechte Schnitte, Kreise sind. Wird daher durch AOa irgend eine andere Ebene gelegt, so ist der Schnitt, welcher durch diese entsteht, eine Ellipse, welche der durch die Hauptaxen AO und CO gehenden Ellipse gleich und ähnlich ist. Denn zieht man in diesem Schnitte PM auf AO senkrecht, so wie PL in der Ellipse ACa, so steht AP auf der Ebene MPL senkrecht, und die Ebene MPL liegt der Ebene COB parallel, also ist MPL ein Kreis, und folglich MP = LP. Da nun für jede Abscisse OP die Applikaten in beyden Schnitten gleich sind, so sind die Schnitte congruent.

Man kann sich also vorstellen, ein solches Sphäroid entstehe, indem sich die Ellipse ACa um ihre Hauptaxe AOa drehe, weshalb es auch den Namen eines elliptischen Rotations-Sphäroids erhalten hat.

§. 7.

Aufgabe. Es sey die Gleichung für eine Oberfläche zwischen drey rechtwinklichten Koordinaten, welche dreyen angenommenen, auf einander senkrechten Axen entsprechen, gegeben; die Lage der Normale eines Punctes M in dieser Oberfläche zu bestimmen.



Auflösung. 1) Es seyen CP = x, PQ = y und QM = z die drey rechtwinklichten Koordinaten für den Punkt M. Man lasse bloß CP und Pp = dx wachsen, indem y ungeändert bleibt, so ändert sich z in der durch MQ gehenden, und mit CP parallelen Ebene, um mo $= \left(\frac{dz}{dx}\right) dx$.

Eben so, wenn man bloß y um dy wachsen läßt, indem x ungeändert bleibt, ändert sich z in der durch MQ und PQ gehenden Ebene um $\left(\frac{dz}{dy}\right) dy$.

2) Man errichte auf der durch Mm und Mμ

gehenden Ebene ein Perpendikel aus M, so ist dies die Normale des Punctes M; diese mag die Ebene der Koordinaten x und y in N treffen. Die Bedingung für diese Linie ist also: $mMN = \mu MN = 90°$.

3) Man verlängere Mm rückwärts nach T, und lege durch MT und MQ eine Ebene, so ist der Durchschnitt derselben TQO mit der Ebene der x und y der Axe AZ parallel: denn da $PQ = pq$, so ist Qq mit Pp parallel, und Qq liegt in dieser Ebene, ist also ein Stück des Durchschnittes.

4) Man fälle in dieser Ebene MO senkrecht auf MT, so ist MT auf der Ebene OMN senkrecht, weil auch $NMT = 90°$ ist. Diese Ebene schneide die Basis in NOL.

5) Da TM auf OMN senkrecht steht, so steht auch die Ebene TMO auf ihr senkrecht, oder MON steht umgekehrt auf TMO senkrecht, und da auch die Basis auf TMO senkrecht steht, so ist auch ihr beyder Durchschnitt NOL auf MTO senkrecht, also $NOQ = 90°$, und folglich NOL parallel mit PQ, also PL die Entfernung des Punctes N von der Ordinate PQ.

6) Nun ist $Mo : mo = TQ : MQ = MQ : QO$, also $\frac{QO}{MQ} = \frac{mo}{Mo} = \left(\frac{dz}{dx}\right)$, folglich $QO = PL = z\left(\frac{dz}{dx}\right)$.

7) Eben so verlängere man $M\mu$ bis sie die Basis in t trifft, und ziehe in der Ebene tMQ, MR senkrecht auf Mt, so ist wie vorhin der Durchschnitt RN der Ebene MRN mit der Basis auf der Ebene tMR senkrecht, und also mit QO parallel, folglich NO = RQ die Entfernung des Punctes N von QO.

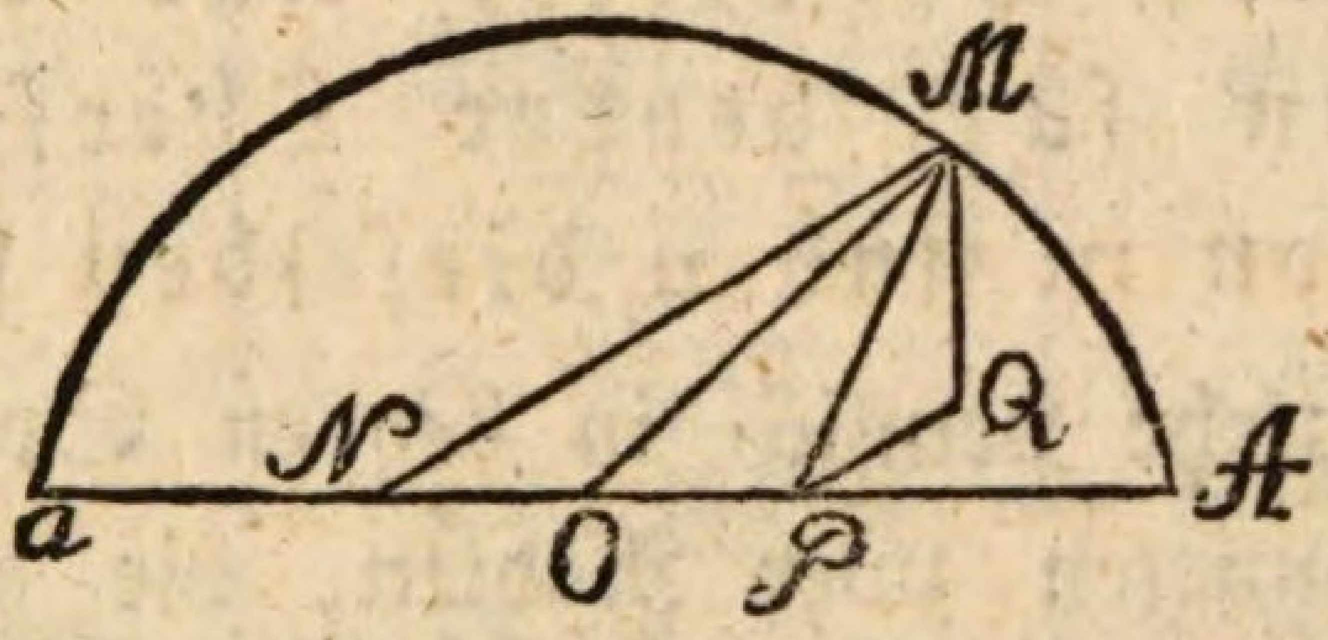
8) Nun ist $Mn = dy$, $n\mu = \left(\frac{dz}{dy}\right) dy$, und $Mn : n\mu = tQ : MQ = MQ : QR$, also $\frac{QR}{MQ} = \left(\frac{dz}{dy}\right)$, und folglich $NO = QR = z\left(\frac{dz}{dy}\right)$, und $NL = y + z\left(\frac{dz}{dy}\right)$, durch welche beyden Werthe von PL und NL die Lage des Punctes N bestimmt wird, wo die Normale die Ebene der x und y trifft.

Folgerung. 1) Für das elliptische Sphäroid ist $xdx + mydy + nzdz = 0$, also $\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{x}{nz}$, und $\left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{my}{nz}$, folglich wird $PL = -\frac{x}{n}$ und $LN = y - \frac{my}{n} = \frac{(n-m)y}{n}$.

2) Beym Rotations-Sphäroid, wo $m = n$, wird also $LN = 0$, oder der Punct N der Normale MN eines jeden Punctes M in der Oberfläche

kommt in die Rotations-Axe zu liegen. Eine jede auf der Oberfläche gezogene Normale geht folglich bey diesem Körper durch seine Rotations-Axe, und fällt also in eine Ellipse die durch diese Axe, und den Punct M geht.

§. 8.



1) Es sey der Radius OM in dem Sphäroid = r, der Winkel MOP = p, der Neigungswinkel MPQ der Ebene, worin MO liegt, mit der Ebene BOA = q, so ist OP = x = r Cos p; PQ = y = z Cot q, und in der Ecke bey O, die an OQ rechtwinklicht ist; 1 : Sin q = Sin MOP : Sin MOQ, also Sin MOQ = Sin p Sin q, folglich z = r Sin p Sin q, und daher y = r Sin p Cos q. Substituirt man diese Werthe für x, y und z in die Gleichung für die Oberfläche, so erhält man:

$$r^2 (\mathrm{Cos}\, p^2 + m\, \mathrm{Sin}\, p^2\, \mathrm{Cos}\, q^2 + n\, \mathrm{Sin}\, p^2\, \mathrm{Sin}\, q^2) = k^2;$$

eine Gleichung für das elliptische Sphäroid zwischen den drey Coordinaten r, p und q.

2) Aus ihr wird r =

$$\frac{\pm k}{\sqrt{(\mathrm{Cos}\, p^2 + m\, \mathrm{Sin}\, p^2\, \mathrm{Cos}\, q^2 + n\, \mathrm{Sin}\, p^2\, \mathrm{Sin}\, q^2)}} = \frac{\pm k}{\sqrt{(1 - \mathrm{Sin}\, p^2\, [(1-m)\, \mathrm{Cos}\, q^2 + (1-n)\, \mathrm{Sin}\, q^2)]}};$$

folglich sind allemal zwey Radien, die in gerader Linie einander gegenüber liegen, gleich groß: denn der über O hinaus verlängerte Radius macht mit OA eben den Winkel p, und da er mit MO in derselben Ebene liegt, so ist auch der Neigungswinkel q für ihn derselbe.

3) Zwey Sphäroide sind daher ähnlich, wenn für beyder Oberflächen die Werthe von m und n dieselben sind.

Man ziehe nemlich in beyden Sphäroiden aus den Mittelpuncten zwey Radien, die gegen die homologen Axen dieselbe Lage haben, welches dadurch geschieht, daß man die Winkel p und q für beyde einerley nimmt, und nenne diese r, r', die Axen, auf die sie bezogen werden, k und k' so ist

$$r = \frac{k}{\sqrt{(1 - \text{Sin}\,p^2[(1-m)\text{Cos}\,q^2 + (1-n)\text{Sin}\,q^2)]}}$$

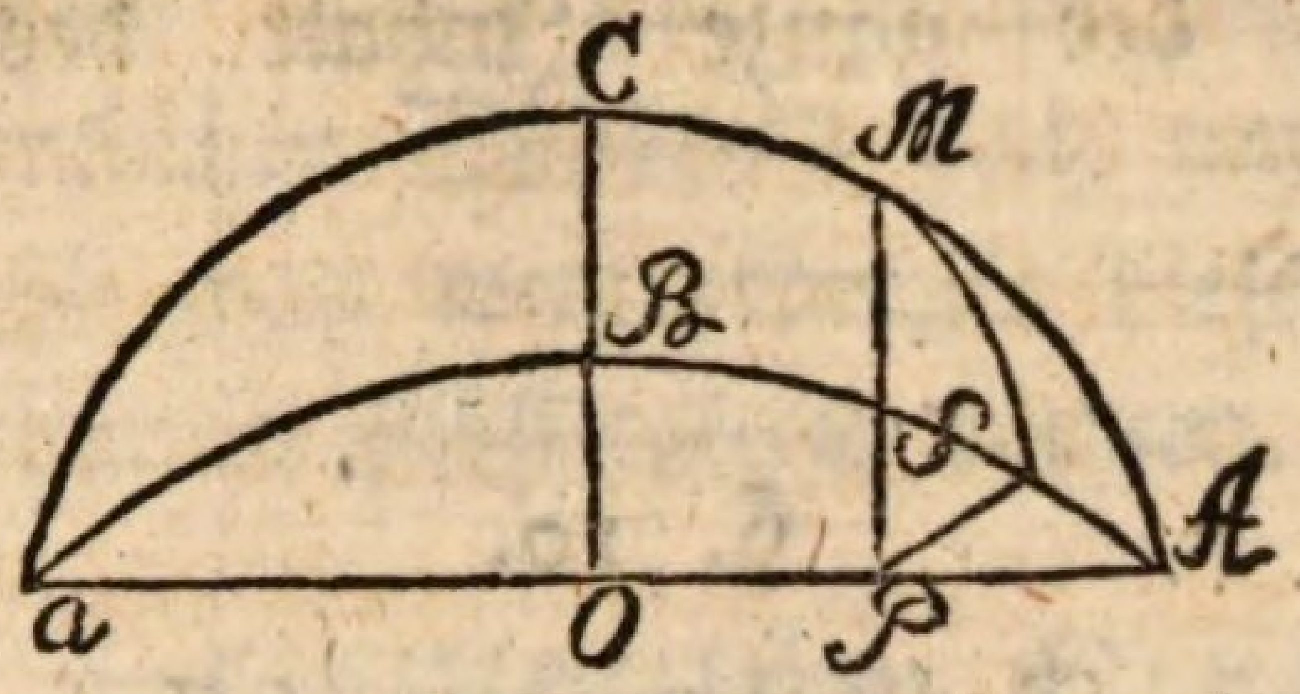
und

$$r' = \frac{k'}{\sqrt{(1 - \text{Sin}\,p^2[(1-m)\text{Cos}\,q^2 + (1-n)\text{Sin}\,q^2)]}},$$

also $k : k' = r : r'$ d. h. ähnlich liegende Radien in beyden verhalten sich wie die homologen Axen; woraus die Aehnlichkeit der beyden Sphäroiden erhellet.

§. 9.

Aufgabe. Den Inhalt eines elliptischen Sphäroids zu berechnen, dessen halbe Hauptaxen k, $\frac{k}{\sqrt{m}}$ und $\frac{k}{\sqrt{n}}$ sind.



Auflösung. 1) Man schneide das Sphäroid vermittelst einer Ebene durch P, mit der Ebene BOC parallel gelegt. Die Gleichung zwischen den Coordinaten y und z dieses Schnittes ist: $my^2 + nz^2 = k^2 - x^2$, wo $x = OP$, der Entf. dieses Schnittes von O (3, 3), und die Axen desselben sind $\sqrt{\left(\frac{k^2 - x^2}{m}\right)}$ und $\sqrt{\left(\frac{k^2 - x^2}{n}\right)}$; also ist sein Inhalt $= \pi \sqrt{\left(\frac{k^2 - x^2}{m}\right)} \cdot \sqrt{\left(\frac{k^2 - x^2}{n}\right)} = \frac{\pi(k^2 - x^2)}{\sqrt{mn}}$.

2) Dies mit dx multiplicirt, giebt $\frac{\pi(k^2 - x^2)\,dx}{\sqrt{mn}}$ für den Raum zwischen zweyen unendlich nahen Schnitten des Sphäroids, oder für das Element desselben, und das Integral davon ist $C + \frac{\pi k^2 x - \frac{1}{3}\pi x^3}{\sqrt{mn}}$. Dies Integral muß, um den Inhalt des ganzen Sphäroids zu erhalten, von $x = -k$ bis $x = +k$ genommen werden; dadurch wird $C = \frac{2\pi k^3}{3\sqrt{mn}}$

und folglich der ganze Inhalt des Sphäroids

$$= \frac{4\pi k^3}{3\sqrt{mn}}.$$

§. 10.

Genauere Beobachtungen haben uns gelehrt, daß die Gestalt aller Planeten von der Kugelform etwas abweiche, daß nemlich die Projectionen derselben, die sich unserm Auge darstellen, einen grösten und einen kleinsten Durchmesser haben. Ein ähnliches Resultat für unsere Erde gaben die Messungen eines Meridian-Grades unter verschiedenen Breiten. Es war also natürlich auf den Gedanken zu kommen, die allgemeine Form aller Weltkörper sey elliptisch, und die Theorie, die wir im Folgenden entwickeln werden, zeigt uns wirklich, daß ein flüssiger Körper unter den Umständen, wie sie bey den Himmelskörpern statt finden, bey einer elliptisch-sphäroidischen Form das Gleichgewicht seiner Theile behaupten könne. So wäre also dies Phänomen an den Weltkörpern erklärt; aber es bleibt noch ein allgemeineres Problem hierbey aufzulösen übrig, und das besteht darinn, zu zeigen, daß aus der Bedingung des Gleichgewichts aller Theile im Körper nothwendig folge, daß der Körper diese Form annehmen müsse, so wie man zeigen kann, daß die Bahnen der Planeten nothwendig Kegelschnitte seyn müssen. Dies Problem übersteigt die Kräfte der Analysis in ihrem jetzigen Zustande; aber gesetzt auch, es gäbe eine andere Form, für die das

Gleichgewicht der Theile statt finden könne, so kann diese vom elleptischen Sphäroid doch nur sehr wenig abweichen, und man wird jederzeit dieser Form das elliptische Sphäroid substituiren können.

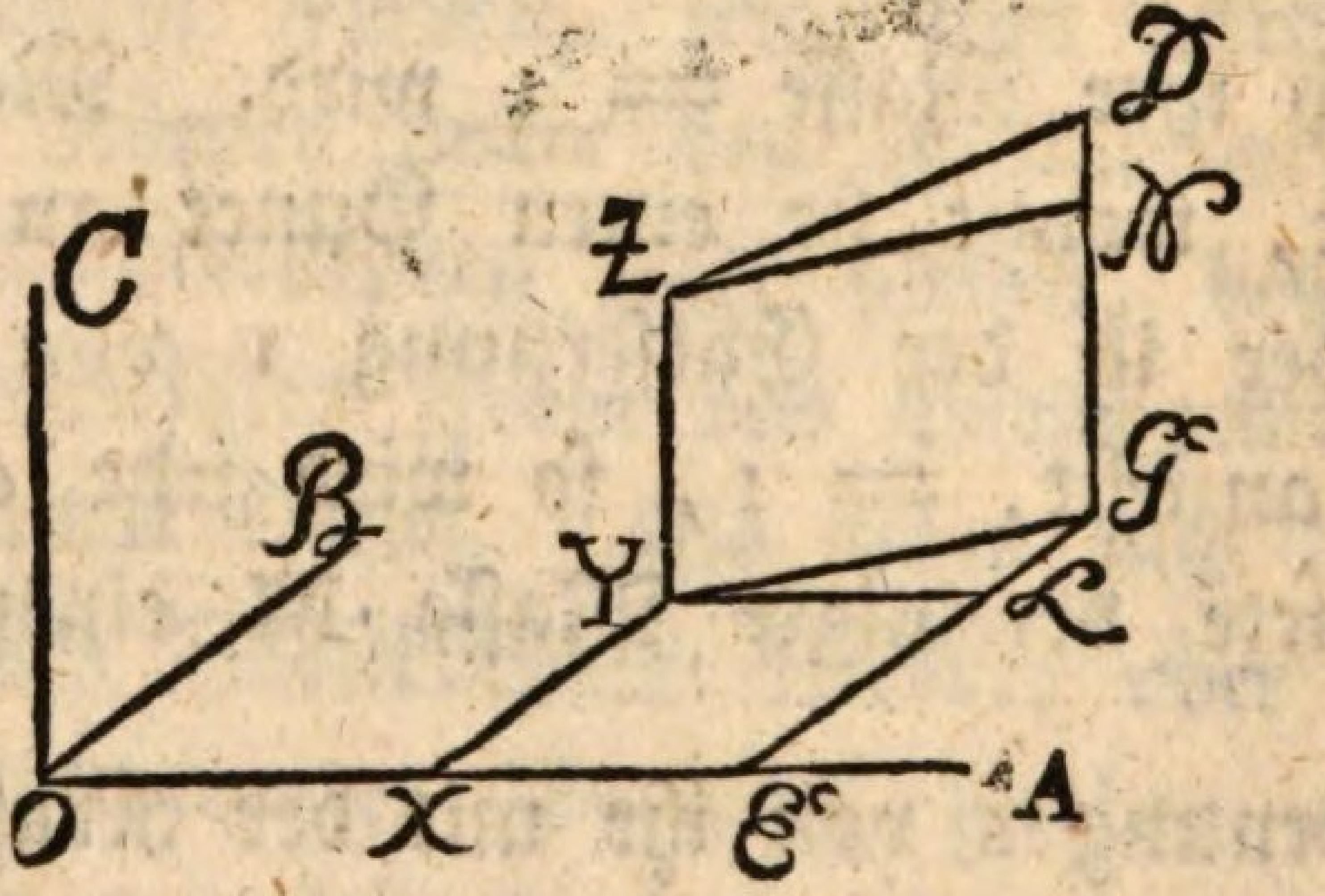
Attraction des elliptischen Sphäroids gegen einen gegebenen Punct überhaupt.

§. 11.

Bey dem folgenden Calcul ist es vor Allem nothwendig, eine Kraft als Einheit festzusetzen, und dies geschieht auf folgende Weise: da eine Kugel einen Punkt so anzieht, als wenn alle ihre Masse im Mittelpunkt derselben vereinigt wäre, so kann man eine willkührliche homogene Sphäre annehmen, und deren Halbmesser und Dichte = 1 setzen, wodurch auch ihre Masse = 1 wird. Man setze nun die Kraft, womit sie einen Punct an ihrer Oberfläche, oder in der Entfernung 1 von ihrem Mittelpuncte anzieht, = 1, so wird jede andere in einem Puncte vereinigte Masse M einen Punct in der Entfernung s von ihr mit der Kraft $\frac{M}{s^2}$ anziehen, und somit ist der Calcul auf bestimmte Einheiten gegründet. Es ist willkührlich, was diese gewählten Einheiten sind; ob z. B. die Dichte dieser Sphäre mit der eines Planeten einerley ist, oder mit der irgend eines andern Weltkörpers, den wir nicht kennen, das thut nichts zur Sache. Da wir aber wegen des Pendels, wovon wir Gebrauch ma-

chen werden, die Zeiteinheit hier zu 1 Sekunde mittlerer Zeit setzen, so dürfen wir den Weg, der durch die Kraft 1 zurückgelegt wird, nicht wie oben $= dt^2$ annehmen, sondern müssen noch einen Faktor f hinzufügen, so daß dieser Weg $f dt^2$ wird. Dieses f, welches in so fern unbestimmt bleibt, als die Sphäre in ihren Dimensionen und ihrer Dichte nicht bestimmt wird, muß am Ende aus dem Calcul herausfallen, so wie auch das ϱ, welches wir für die Dichte der Masse setzen werden, deren Attraction wir würklich betrachten, weil die Resultate, die wir suchen, von der Wahl obiger Einheiten unabhängig sind.

§. 12.



Aufgabe. Die Kraft zu finden, womit ein Punct D von einem Elemente eines gegebenen Körpers angezogen wird.

Auflösung. 1) Es seyen $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$ die Coordinaten für einen unbestimmten Punct Z des Körpers, welche sich auf die drey angenommenen Axen OA, OB und OC beziehen,

hen, so ist das Element des Körpers an diesem Orte Z ein rechtwinklichtes Parallelepipedum, dessen Seiten durch die Differenziale dx, dy, dz der drey Coordinaten gebildet werden, und sein Inhalt ist daher $= dx\,dy\,dz$. Nennt man also ϱ die Dichte des Körpers, so hat man für seine Masse $\varrho\,dx\,dy\,dz$, welche wir dM nennen wollen.

2) Der Punkt D werde in Bezug auf dieselben Axen durch die Coordinaten $OE = a$, $EG = b$ und $GD = c$ bestimmt, so hat man, wenn YL mit AO und ZN mit YG parallel gezogen wird, $YL = a - x$, $GL = b - y$, also $YG^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2$. Da nun

3) $DN = c - z$, so wird $ZD^2 = YG^2 + DN^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2$ und folglich die Kraft, womit der Punct D vom Elemente bey Z nach der Richtung ZD angezogen wird, $= \frac{dM}{ZD^2} = \frac{\varrho\,dx\,dy\,dz}{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z^2}$.

§. 13.

Da verschiedene Elemente des Körpers, nach Verschiedenheit ihrer Lage gegen D, den Punct D nach verschiedenen Richtungen ziehen, so lassen sich diese Kräfte nicht unmittelbar summiren; will man daher die Anziehung des ganzen Körpers gegen D berechnen, so muß man das vorhin gefundene Element der Anziehung nach den Richtungen der drey Axen zerlegen; alsdann kann man jede dieser drey

Kräfte, z. B. die nach der mit AO parallelen Richtung, für alle Elemente des Körpers zusammen nehmen, und man erhält auf diese Weise drey Totalkräfte, womit der ganze Körper den Punct D nach den Richtungen der drey Axen anzieht. Setzt man endlich diese zusammen, so erhält man Eine Kraft, womit der Punct D vom ganzen Körper angezogen wird, und eine bestimmte Richtung, nach welcher diese Anziehung geschieht.

§. 14.

Die Kraft, womit das Element des Körpers bey Z den Punct D nach der Richtung DZ anzieht, war (12) $= \frac{dM}{DZ^2}$

$$= \frac{\varrho\, dx\, dy\, dz}{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}$$

zerlegt man sie in eine Kraft nach DG, parallel der Axe OC, und eine nach der Richtung NZ, so wird erstere $= \frac{DN \,.\, dM}{DZ^3} = \frac{(c-z)\, dM}{DZ^3}$, und letztere $= \frac{NZ\, dM}{DZ^3}$. Diese letztere läßt sich von neuem in zwey Kräfte nach den Richtungen GE und LY zerlegen, welche den andern beyden Axen OB und OA parallel sind, von welchen die nach GE $= \frac{GL \,.\, dM}{DZ^3}$ $= \frac{(b-y)\, dM}{DZ^3}$, und die nach LY $= \frac{LY \,.\, dM}{DZ^3}$

$= \frac{(a-x)\,dM}{DZ^3}$ wird. Demnach sind die Kräfte, welche aus der Zerlegung der Kraft $\frac{dM}{DZ^2}$ entspringen, folgende:

die, nach der Richtung der Axe AO, $= \frac{(a-x)\,dM}{DZ^3}$;

die, nach der Richtung von BO, $= \frac{(b-y)\,dM}{DZ^3}$;

und die, nach der Richtung von CO, $= \frac{(c-z)\,dM}{DZ^3}$.

§. 15.

Um also die Anziehung des ganzen Körpers gegen den Punct D zu erhalten, muß jede dieser drey Gattungen von Kräften für alle Elemente des Körpers summirt werden. Man summire zuvörderst die Kräfte aller der Elemente, welche in der Ordinate YZ liegen, so ist hierbey bloß z veränderlich, indem für jedes Element, welches in der Linie YZ liegt, x und y dieselben sind, und es wird daher die Anziehung des Parallelepipedums, das auf der Grundfläche dx dy steht, und die Höhe z hat, nach der Richtung AO

$$= (a-x)\,dx\,dy \int \frac{dz}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

wo der Nenner des Differenzials unter dem Integralzeichen als bloße Funktion von z anzusehen ist.

Wir wollen hier bloß die Kraft betrachten, welche nach der Richtung AO wirkt, weil das Verfah-

ren bey den andern beyden ganz dasselbe ist. Das Integral von dieser mag $dx\,dy\,(a-x)P$ heißen, wo P also eine Function von z bedeutet, welche x, y, a, b und c als beständige Größen mit enthält; um es vollständig zu haben, muß man es von dem untern der beyden Puncte, wo die Ordinate z die Oberfläche trifft, bis zum obern nehmen.

Beim Sphäroid ist für die Oberfläche $x^2 + my^2 + nz^2 = k^2$ (1), welches

$$z = \pm \sqrt{\left(\frac{k^2 - x^2 - my^2}{n}\right)}$$ giebt. Jenes Integral müßte also in diesem Falle für einen dieser Werthe von $z = 0$ genommen, und dann in demselben z = dem andern Werthe gesetzt werden. Dadurch wird P, so wie bey jedem andern gegebenen Körper, zu einer Function von x und y, die dabey noch die Größen k, m, n, a, b und c in sich faßt; wir wollen diese = P′ setzen.

Man nehme nun y als veränderlich an, und summire die Anziehungen von allen den Prismen, welche auf den Grundflächen $dx\,dy$ längst der Ordinate y stehen, und auf beyden Seiten der Ebene AOB bis an die Oberfläche reichen, so bekommt man für die Anziehung des durch X gehenden; und auf der Ebene AOB senkrechten Schnittes, von der Dicke dx, den Ausdruck $(a-x)\,dx\int P'dy$, wo P′ bloß als Function von y betrachtet werden muß.

Das Integral $\int P'dy$, welches wir π nennen

wollen, ist eine Function von y, in der außerdem noch x, k, m, n, a, b und c als beständige Größen vorkommen, und muß von dem einen der beyden Werthe von y für die äußersten Grenzen dieser Ordinate (beym Sphäroid) in der Ellipse AOB bis zum andern genommen werden, oder, da $my^2 = k^2 - x^2$ die Gleichung für diese Ellipse ist, von $y = -\sqrt{\left(\frac{k^2 - x^2}{m}\right)}$ bis zu eben diesem Werthe positiv genommen.

Dadurch wird π zu einer Function von x allein, die π' heißen mag, und das Differenzial der Anziehung des ganzen Sphäroids wird nun $= (a-x)\pi' dx$. Diese Elemente längst der Axe AO summirt, geben für die Anziehung des ganzen Sphäroids gegen den Punct D nach der AO das Integral $\int (a-x)\pi' dx$, welches von $x = -k$ bis $x = +k$ genommen werden muß, wodurch man einen Ausdruck erhält, der nur die Größen k, m, n, a, b und c in sich faßt.

§. 16.

Gewöhnlich stellt man die Totalkraft des Körpers auf den gegebenen Punct nach einer der drey Richtungen, wie z. B. nach AO, durch das dreyfache Integral

$$\int (a-x) \int dy \int \frac{dz}{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

dar, oder zieht dasselbe auch wol in die Form

$$\iiint \frac{(a-x)\,dx\,dy\,dz}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z^2)]^{\frac{3}{2}}}$$

zusammen. Um näher einzusehen, wie man dies zu verstehen habe, habe ich das natürliche Verfahren, die Kräfte der einzelnen Elemente des Körpers auf einen gegebenen Punct zu summiren, im vorigem § auseinander gesetzt, welches doch übrigens in der Ausführung nicht das vortheilhafteste ist, indem man beym Integriren auf Schwürigkeiten trifft, die den Fortgang des exacten Calculs hemmen, und nur gestatten, das Problem näherungsweise aufzulösen.

Ehe wir weiter gehen, muß ich vorläufig erinnern, daß bey dieser Untersuchung zwey Fälle vorkommen, die in der Behandlung wesentlich verschieden sind, nemlich, wenn der Punct D im Innern des Sphäroids liegt, oder wenn er außerhalb demselben befindlich ist. Da letzterer Fall nicht anders als durch die Verbindung mehrerer Methoden aufgelöst werden kann, so wollen wir zuerst eine allgemeine Methode vortragen, die sich auf beyde Fälle erstreckt.

§. 17.

Lehrsatz. Es seyen A, B, C die Kräfte, welche das Sphäroid auf den Punct D nach den dreyen Richtungen AO, AO und CO ausübt; ferner sey $V = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{1}{2}}}$ in dem Sinne genommen, wie man den Ausdruck

für A (16) zu verstehen hat, so ist $A = -\left(\frac{dV}{da}\right)$, $B = -\left(\frac{dV}{db}\right)$, $C = -\left(\frac{dV}{dc}\right)$.

Beweis. 1) Man setze $\sqrt{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]} = u$, so hat man

$$\left(\frac{d\int \cdot \frac{dz}{u}}{da}\right) = C + \int \left(\frac{d\frac{1}{u}}{da}\right) dz \ (2)$$

$= C - \int \frac{(a-x)\,dz}{u^3}$ und folglich, wenn für einerley z beyde Ausdrücke verschwinden sollen, wie das der Fall sowol bey A als V ist (15), $\left(\frac{d\int\frac{dz}{u}}{da}\right)$

$$= -\int \frac{(a-x)\,dz}{u^3} = -(a-x)\int \frac{dz}{u^3},$$

weil in diesem Falle C = o wird.

2) Setzt man nun $z = +\sqrt{\left(\frac{k^2 - x^2 - my^2}{n}\right)}$ und nennt das Integral $\int \frac{dz}{u^3}$ wie in (15) P′, so wird:

$dy\left(\frac{d\int\frac{dz}{u}}{da}\right) = -(a-x)\,P'dy$, also $\int dy\left(\frac{d\int\frac{dz}{u}}{da}\right)$

$$= C + \left(\frac{d\iint\frac{dy\,dz}{u}}{da}\right) = -(a-x)\int P'dy.$$

3) Für $y = -\sqrt{\left(\frac{k^2 - x^2}{m}\right)}$ wird letzteres Integral $= 0$ (15), und vermöge der Bedingung auch $\iint\left(\frac{dy\,dz}{u}\right) = 0$, folglich auch das Differenzial desselben nach a genommen (4), mithin C wiederum $= 0$, oder

$$\left(\frac{d\iint\frac{dy\,dz}{u}}{da}\right) = -(a-x)\int P'dy.$$

4) In beyden werde nun $y = +\sqrt{\left(\frac{k^2 - x^2}{m}\right)}$, und was bey dieser Substitution das Integral $\int P'dy$ giebt, wie in §. 15. $= \pi'$ gesetzt, so erhält man:

$$dx\left(\frac{d\iint\frac{dy\,dz}{u}}{da}\right) = -(a-x)\,\pi'dx,$$ und

durch Integration $\int dx\left(\frac{d\iint\frac{dy\,dz}{u}}{da}\right)$

$$= \left(\frac{d\iiint\frac{dx\,dy\,dz}{u}}{da}\right) = -\int(a-x)\,\pi'dx,$$

wo wieder keine Constante hinzuzufügen nöthig ist, weil beyde Integrale für $x = -k$ verschwinden sollen. Dagegen wird nun für $x = +k$ das Integral $\int\int\int \frac{dx\,dy\,dz}{u} = V$, und $\int (a-x)\pi' dx = A$, folglich $\left(\frac{dV}{da}\right) = -A$, oder $A = -\left(\frac{dV}{da}\right)$.

5) Auf dieselbe Art läßt sich zeigen, daß $B = -\left(\frac{dV}{db}\right)$ und $C = -\left(\frac{dV}{dc}\right)$ sey.

§. 18.

Vermöge dieses Satzes kann man die gesuchten Werthe von A, B und C aus dem Werthe von V zugleich erhalten, indem man die partiellen Differenzialien $\left(\frac{dV}{da}\right)$, $\left(\frac{dV}{db}\right)$, $\left(\frac{dV}{dc}\right)$ von V nimmt. Man vergesse hierbey nicht, daß das Integral $\int\int\int \frac{dx\,dy\,dz}{[(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2]^{\frac{1}{2}}}$, welches wir V genannt haben, auf eben die Weise berechnet werden müsse, wie wir die Elementarkräfte, welche A hervorbringen in §. 15 zu summiren gezeigt haben, und daß also V weiter keine Größen als k, m, n, a, b und c enthalte.

§. 19.

1) Durch Entwickelung des Nenners von V wird

$$V = \int \frac{dx\,dy\,dz}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(1 - \frac{2ax+2by+2cz}{a^2+b^2+c^2} + \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}\right)}}$$

(das Zeichen $\int$ der Kürze wegen für dreymalige Integration genommen). Dies giebt, in eine Reihe aufgelöst:

$$V = \int \frac{dM}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}} \cdot \left[1 + \frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2} - \frac{x^2+y^2+z^2}{2(a^2+b^2+c^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{ax+by+cz}{a^2+b^2+c^2}\right)^2 \ldots\right]$$

2) Da O der Schwerpunct des Sphäroids ist, so ist $\int x\,dM = 0$, $\int y\,dM = 0$, $\int z\,dM = 0$, also wird:

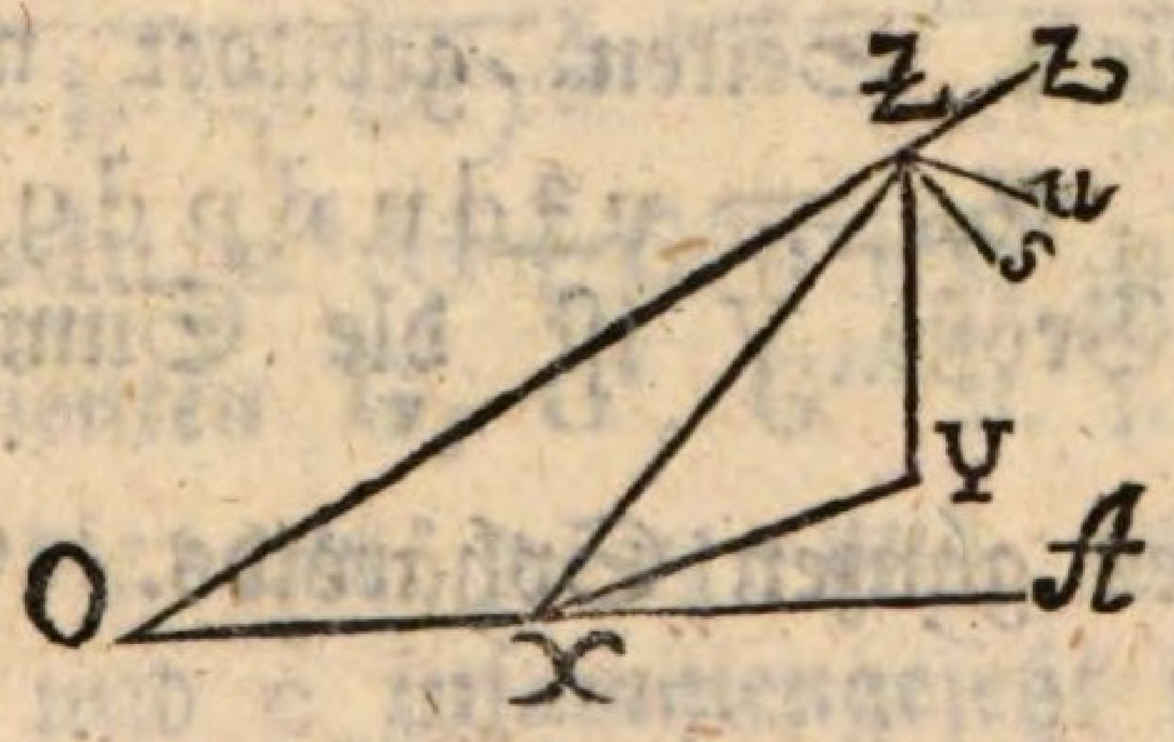
$$V = \int \frac{dM}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}} - \int \frac{dM}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{2}x(^2+y^2+z^2) - \frac{3}{8}\frac{(2ax+2by+2cz-x^2+y^2+z^2)^2 - ..}{(a^2+b^2+c^2)}\right)$$

3) Ist die Entfernung des Punctes D vom Mittelpuncte des Sphäroids sehr groß, so ist sehr nahe $V = \frac{M}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}$, also $A = -\left(\frac{dV}{da}\right)$ $= \frac{aM}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}$, $B = \frac{bM}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}$, $C = \frac{cM}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}$. Da sich nun diese drey

Kräfte verhalten wie die Coordinaten des Punctes D, so ist die mittlere Kraft, welches aus ihnen entspringt, nach O gerichtet, und $= \frac{M}{a^2 + b^2 + c^2}$ $= \frac{M}{OD^2}$. Die Anziehung verhält sich dann also gerade so, als wäre alle Masse des Sphäroids, wie bey der Kugel, in seinem Mittelpuncte vereinigt.

4) Hieraus erhellet, warum die gegenseitigen Attractionen der Weltkörper so betrachtet werden können, als wären es Sphären, welche mit den Sphäroiden, denen sie substituirt werden, einerley Masse hätten.

§. 20.



1) Man denke sich durch die Axe OA und den Punct Z im Körper eine Ebene gelegt, und nenne den Neigungswinkel ZXY dieser Ebene gegen AOB, q; den Winkel ZOA, den der Radius ZO mit der Axe AO macht, p, und diesen Radius selbst, u, so dienen diese drey Stücke eben so gut zur Bestimmung des Punctes Z als die Coordinaten x, y und z; denn diese hängen von jenen Stücken ab (8).

2) Man beschreibe in der Ebene ZOA mit OZ den unendlich kleinen Bogen $Zu = udp$, und in der Ebene ZXY mit XZ den Bogen $Zs = dq . XZ = u \, Sin \, p dq$, und lasse endlich OZ um $Zz = du$ wachsen, so entsteht durch diese dreyfache Versetzung des Punctes Z ein rechtwinklichtes Parallelepipedum, dessen Seiten die Elemente Zz, Zu und Zs sind. Es ist nemlich Zu auf OZ senkrecht, so wie auch Zs auf OZ, denn Zs ist das Element des Umfangs der Grundfläche eines senkrechten Kegels, wovon O die Spitze und OZ die Seitenfläche ist. Da nun Zs auch zugleich mit XZ einen rechten Winkel macht, so steht es auf der Ebene ZOA senkrecht, und mithin auch auf Zu.

3) Der Inhalt des körperlichen Elementes, das durch diese Seiten gebildet wird, ist also $= Zz . Zu . Zs = u^2 du \, dp \, dq \, Sin \, p$.

4) Die Größe V ist die Summe aller Elemente $\frac{dM}{DZ}$ des ganzen Sphäroids. Es ist also begreiflich, daß, um V zu berechnen, es einerley sey, auf welche Weise man sich das Sphäroid in seine Elemente getheilt denkt, d. i. was für Coordinaten man dazu gebraucht, es mögen rechtwinklichte oder schiefe seyn, oder auch ein Radius mit zweyen Winkeln die seine Lage bestimmen.

5) Wählt man den letztern Weg, so wird, weil $x = u \, Cos \, p$, $y = u \, Sin \, p \, Cos \, q$ und

$z = u \,\mathrm{Sin}\, p \,\mathrm{Sin}\, q$ ist (8), $DZ = \sqrt{[(a - u \,\mathrm{Cos}\, p)^2 + (b - u \,\mathrm{Sin}\, p \,\mathrm{Cos}\, q)^2 + (c - u \,\mathrm{Sin}\, p \,\mathrm{Sin}\, q)^2]}$, also

$$V = \int \frac{n\, u^2\, du\, dp\, dq\, \mathrm{Sin}\, p}{\sqrt{[(a - u \,\mathrm{Cos}\, p)^2 + (b - u \,\mathrm{Sin}\, p \,\mathrm{Cos}\, q)^2 + (c - u \,\mathrm{Sin}\, p \,\mathrm{Sin}\, q)^2]}}$$

oder in eine Reihe entwickelt

$$V = \frac{M}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}} \int\int\int u^2\, du\, dp\, dq\, \mathrm{Sin}\, p \left[\tfrac{1}{2} u^2 - \tfrac{3}{8} u^2 \frac{(2a \,\mathrm{Cos}\, p + 2b \,\mathrm{Sin}\, p \,\mathrm{Cos}\, q + 2c \,\mathrm{Sin}\, p \,\mathrm{Sin}\, q - u)^2}{a^2 + b^2 + c^2} - \ldots\right]$$

§. 21.

1) Man übersieht leicht, daß sich V unter folgende Form bringen lasse:

$$V = \frac{M}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} \int\int\int dp\, dq\, \mathrm{Sin}\, p\, du \,.\, u^4 (G + G'u + G''u^2 + G'''u^3 + \ldots)$$

wo die Coefficienten G, G′, G″ u. s. f. Ausdrücke seyn werden, die aus p, q und den beständigen Größen a, b und c zusammengesetzt sind.

2) Summirt man nun zuvörderst die Elemente dV für die Elemente dM, welche längst OZ liegen, so sind hierbey p und q unveränderlich, und man erhält:

$$V = \frac{M}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} \int\int dp\, dq\, \mathrm{Sin}\, p \,.\, u^5 \left(\frac{G}{5} + \frac{G'u}{6} + \frac{G''u^2}{7} + \frac{G'''u^3}{8} + \ldots\right)$$

3) Dies Integral muß von $u = -U'$, bis $u = +U$ genommen werden, wenn U den bis an die Oberfläche fortgesetzten Radius bedeutet. Da nun $U' = U$ ist (8), so heben sich die geraden Potenzen von U, und es wird

$$V = \frac{M}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\int\int dp\,dq\,\mathrm{Sin}\,p \,.\, U^5\left(\frac{2G}{5} + \frac{2G''u^2}{7} + \frac{2G''''u^4}{9} + \cdots\right)$$

4) Nun ist

$$U^2 = \frac{k^2}{1 - \mathrm{Sin}\,p^2\,[(1-m)\,\mathrm{Cos}\,q^2 + (1-n)\,\mathrm{Sin}\,q^2]}$$

(ebendaselbst), welches $= \frac{k^2}{1-w}$ gesetzt, und entwickelt, die Reihe: $k\,(1 + \frac{1}{2}w + \frac{3}{8}w^2 + \ldots)$ giebt. Substituirt man in dieser für w seinen Werth, so bekommt man: $U = k + \frac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,p^2 k\,[(1-m)\,\mathrm{Cos}\,q^2 + (1-n)\,\mathrm{Sin}\,q^2] + \ldots$.

5) Wenn man dies für U in die Glieder des Integrals (3) setzt, und sie einzeln, einmal nach p, und dann nach q, integrirt, so giebt jedes besonders eine Reihe, welche eine Potenz von k als Faktor überhaupt enthält, und übrigens nach den Potenzen von $1-m$ und $1-n$ fortgeht. Auf solche Weise wird $\int\int dp\,dq\,\mathrm{Sin}\,p \,.\, 2GU^5 = K^5 R$, $\int\int dp\,dq\,\mathrm{Sin}\,p \,.\, \frac{2G''U^7}{7} = K^7 R'$ u. s. f., wo R, R' u. s. f. Reihen bedeuten, die nach den Po-

tenzen von 1 — m und 1 — n fortgehen. Oder es sey $\frac{3R\sqrt{mn}}{4\pi} = S$, $\frac{3R'\sqrt{mn}}{4\pi} = S'$, so wird

$$k^5 R = \frac{4\pi k^3}{3\sqrt{mn}} \cdot k^2 S = Mk^2 S,\ K^7 R'$$

$$= \frac{4\pi k^3}{3\sqrt{mn}} \cdot k^4 S' = Mk^4 S'$$ u. s. f. und die Reihen S, S' . . werden von gleicher Beschaffenheit seyn, wie die erstern R, R' . . . . Dies vorausgesetzt, erhält man endlich:

$$V = \frac{M}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{3}{2}}} (a^2 + b^2 + c^2 - k^2 S$$

$$- {}^4kS' - k^6 S''$$ u. s. f.)

6) Statt der Größen m, und n bringe man die Quadrate der Eccentricitäten der Hauptellipsen des Sphäroids in den Calcul. Nennt man diese Quadrate ϑ und π, so ist $\vartheta = \frac{k^2(1 - m)}{m}$, $\pi = \frac{k^2(1 - n)}{n}$, und folglich $1 - m = \frac{\vartheta}{k^2 + \vartheta}$

$$= \frac{\vartheta}{k^2} - \frac{\vartheta^2}{k^4} + \ldots,\ 1 - n = \frac{\pi}{k^2 + \pi} = \frac{\pi}{k^2}$$

$$- \frac{\pi^2}{k^4} + \ldots$$ Diese Werthe für 1 — m und 1 — n substituirt, verwandeln offenbar die Reihen S . S' u. s. f. in andere, die nach den Potenzen von $\frac{\vartheta}{k^2}$ und $\frac{\pi}{k^2}$ fortgehen.

7) Aus der Form des Ausdrucks, den wir für V erhalten haben, erhellet, daß derselbe um desto mehr convergiren wird, je kleiner k im Verhältniß gegen $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$ ist, und je geringer $\frac{\vartheta}{k^2}$ und $\frac{\pi}{k^2}$ an sich sind.

§. 22.

Es sey U die Summe aller der Glieder der Reihe $a^2 + b^2 + c^2 - k^2 S - k^4 S'$ u. s. f., welche kein k enthalten. Zu diesen gehören in der Reihe $k^2 S$ diejenigen, welche bloß $\frac{\vartheta}{k^2}$ und $\frac{\pi}{k^2}$ zu Factoren haben; in der Reihe $k^4 S'$ sind es die, zu denen die Factoren $\frac{\vartheta^2}{k^4}$, $\frac{\vartheta\pi}{k^4}$, und $\frac{\pi^2}{k^4}$ gehören.

Unter den übrigen Gliedern, welche k enthalten, nehme man die besonders zusammen, welche $\frac{\vartheta}{k^2}$ in der kleinsten Potenz enthalten, und aus diesen wähle man wiederum diejenigen aus, in denen zugleich $\frac{\pi}{k^2}$ in der kleinsten Potenz vorkommt; erstere Potenz mag r, letztere r′ heißen. Endlich nehme man aus diesen alle diejenigen, welche außerdem noch durch die kleinste Potenz von k^2 multiplicirt sind, welche Potenz i seyn mag, so werden diese Glie-

Glieder den allgemeinen Factor $k^{2i} \cdot \frac{\vartheta^r}{k^{2r}} \cdot \frac{\pi^{r'}}{k^{2r'}}$ enthalten, und ihre Summe wird die Form

$k^{2i} \cdot \frac{\vartheta^r}{k^{2r}} \cdot \frac{\pi^{r'}}{k^{2r^2}} \cdot P$ haben, so daß P eine Function von a, b und c ist, aber weder k noch ϑ noch π enthält.

Dadurch bekommt man

$$V = M \left(U + k^{2i} \cdot \frac{\vartheta^r}{k^{2r}} \cdot \frac{\pi^{r'}}{k^{2r'}} \cdot P + \text{u. s. f.}\right),$$

wo i, r und r′ ganze und positive Zahlen sind.

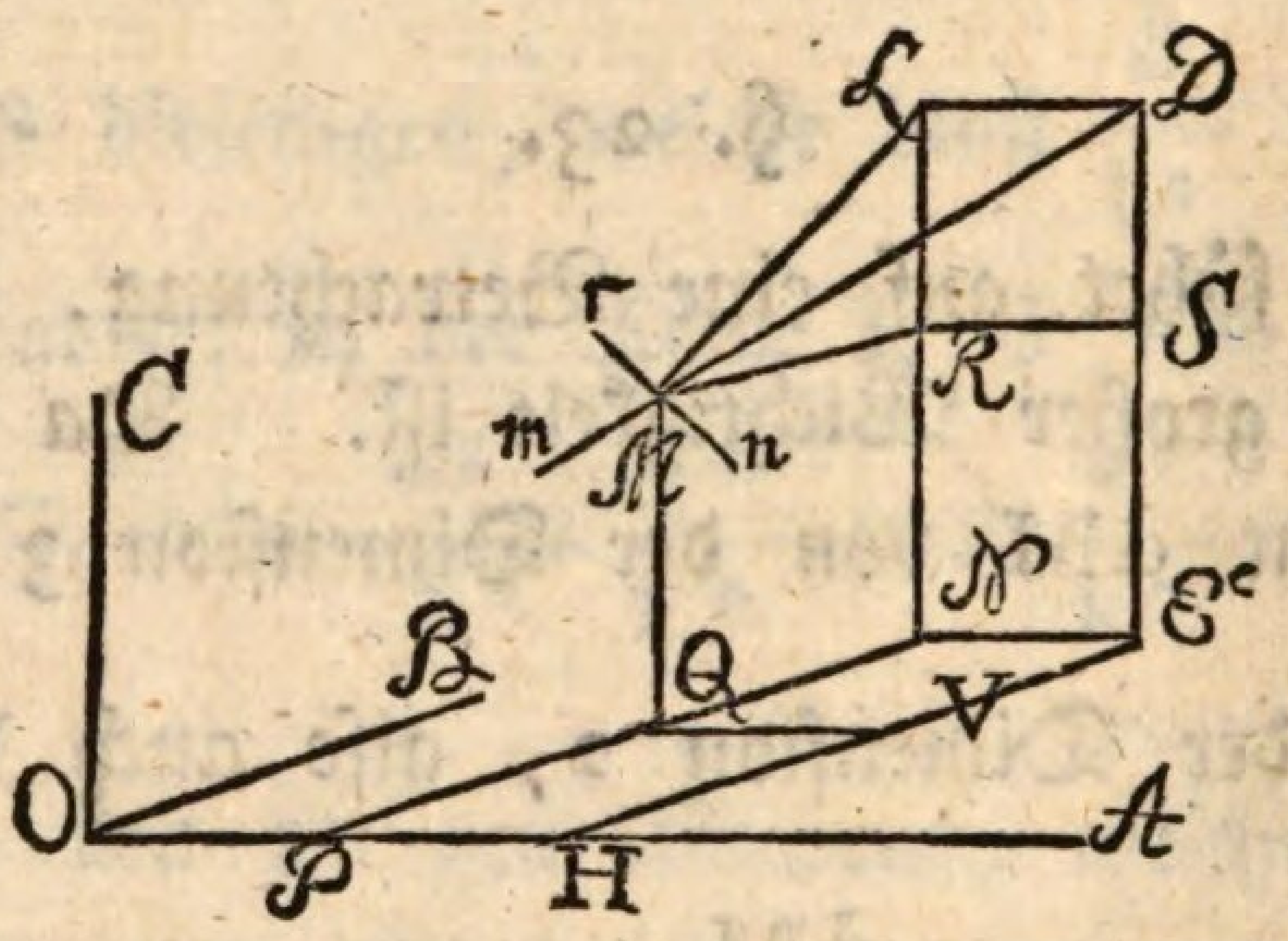
§. 23.

Dies führt auf eine Betrachtung, die für die Folge von großer Wichtigkeit ist. Da nemlich jedes Element dM von der Dimension 3 ist, so ist $\frac{dM}{DZ}$ von der Dimension 2, also auch V, als die Summe aller dieser $\frac{dM}{DZ}$. Daher müssen U und die folgenden Glieder von der Dimension — 1 seyn, und da $\frac{\vartheta}{k^2}$ und $\frac{\pi}{k^2}$, o zur Dimension haben, so muß P von der Dimension — 1 — 2i seyn, folglich da i zum wenigsten 1 ist (denn die Glieder S, S′ u. s. f. enthalten weiter kein k, als was in den Factoren $\frac{\vartheta}{k^2}$ und $\frac{\pi}{k^2}$ vorkommt, und können

also die Potenzen von k^2, die sie zu Coefficienten haben, nicht aufheben) so ist die Dimension von P wenigstens — 3, d. i. sie kann negativ genommen, nicht kleiner als — 3, z. B. nicht — 2 seyn. Von dieser Bemerkung werden wir weiterhin Gebrauch machen.

Attraction des Sphäroids gegen einen Punct im Innern desselben.

§. 24.



Man kann auf eine einfachere Weise zu der Bestimmung von A, B und C gelangen, indem man den Punct D als Anfangspunct der Coordinaten betrachtet. Das Verfahren hierbey ist folgendes:

1) Es sey M ein beliebiger Punct im Sphäroid, dem die Coordinaten $OP = x$, $PQ = y$, $QM = z$ zugehören; D der Punct, dessen Anziehung vom Sphäroid wir betrachten wollen. Man

lege durch DE eine Ebene mit AOC parallel, und ziehe DL in dieser auf DE senkrecht. Der dadurch entstandene Winkel MDL mag p heißen.

2) Man lege ferner durch MQ eine Ebene mit BOC parallel, sie wird die Ebene LDE irgendwo in LN schneiden, außerdem sey in dieser neuen Ebene MR auf MQ senkrecht, so entsteht dadurch noch ein Winkel LMR, welchen wir q nennen wollen.

3) Durch die beyden Winkel p und q und den Radius MD, welcher = r seyn mag, wird die Lage des Punctes M gegen D bestimmt. Es sind nemlich dadurch in der Ecke bey D, der Flächenwinkel an DL = 90° — q, und die ihn einschließenden Seiten LDM = p und LDS = 90° gegeben; folglich ist die Ecke selbst bestimmt, und mithin auch die Lage der Seitenlinie MD gegen die unbewegliche Ebene DLNE, also, da außerdem noch die Linie DM = r gegeben ist, auch die Lage des Punctes M gegen diese Ebene.

4) Das in M befindliche Element ist ein Parallelepipedum, dessen Dimensionen durch die Aenderungen der drey angenommenen Stücke p, q und r gebildet werden. Es ist also Mm = dr die eine Seite desselben; ferner, wenn man mit LM in der Ebene LMR einen Bogen Mr = dq . ML = r Sin p dq, und mit DM in der Ebene LMD

einen Bogen Mn = dp . DM = rdp beschreibt, so werden dies die andern beyden Seiten des Elements.

5) Diese Seitenlinien stehen gegenseitig senkrecht auf einander, und zwar erstlich Mr auf Mm, oder MD deshalb, weil DL als parallel mit AO auf BOC, also auch auf LMR, mithin auch die Ebene MLD, da sie durch DL geht, auf LMR senkrecht ist, und folglich Mr, welches in letzterer der beyden senkrechten Ebenen liegt, und mit dem Durchschnitte ML derselben einen rechten Winkel bildet (4), auf der erstern MLD senkrecht steht. Aus eben dem Grunde ist auch Mr auf Mn senkrecht, und außerdem ist vermöge der Construction mMn = 90°. Das Parallelepipedum, welches durch die drey Elemente hervorgebracht wird, ist also rechtwinklicht, und daher sein Inhalt $= r^2 dr \operatorname{Sin} p \, dp \, dq$.

6) Die Kraft, womit dies Element den Punct D anzieht, ist $= \frac{dM}{r^2} = dr \operatorname{Sin} p \, dp \, dq$, und der Theil dieser Anziehung nach der mit AO parallelen Richtung $= \frac{dM \operatorname{Cos} p}{r^2} = dr \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p \, dp \, dq$, so wie der andere nach der mit LM parallelen Richtung $= \frac{dM . \operatorname{Sin} p}{r^2} = dr \operatorname{Sin} p^2 \, dp \, dq$. Diese zerfällt noch in zwey Kräfte nach den Richtungen

RM und LR, welche mit den Axen OB und OC parallel sind, wovon die erstere = dr Sin p^2 Cos q dp dq, die letztere = dr Sin p^2 Sin q dp dq ist. Man hat also

7) $A = \int\int\int dr\, dp\, dq \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p$, $B = \int\int\int dr\, dp\, dq \operatorname{Sin} p^2 \operatorname{Cos} q$, $C = \int\int\int dr\, dp\, dq \operatorname{Sin} p^2 \operatorname{Sin} q$.

§. 25.

Man fange in diesen Ausdrücken für A, B und C zuerst mit der Integration nach r an, d. i. man lasse DM in unveränderlicher Lage wachsen, so bleiben p und q immer dieselben: denn da der folgende Punct m des Radius stets in der Ebene MDL bleibt, so ist ML sich immer parallel, und so auch MR, also bleibt der Winkel LMD sowol als LMR ungeändert. Die Elemente der Anziehungen nach r integriren heißt also: die Anziehungen aller Parallelepipeden suchen, welche in der Linie DM von dem einen Ende derselben, das in der Oberfläche liegt, bis zum andern liegen. Dadurch erhält man die Anziehung zweyer in D zusammenstoßenden Keile, die sich bis an die Oberfläche erstrecken, und von vier nächsten Radien eingeschlossen sind, welche die Elemente der Winkel mit einander bilden.

§. 26.

Wenn man auf diese Weise nach r integrirt, so erhält man für das Element von A, (r + C) dp dq Sin p Cos p. Es seyen nun R und R′ die

Werthe der Radien vom Puncte D an bis zur Oberfläche auf beyden Seiten fortgesetzt, so ist, wenn wir das Integral von $r = R$ anrechnen, $R + C = o$, also $r + C = r - R$, und folglich jene Summe $= (r - R)\, dp\, dq \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p$, welche für $r = R'$ den vollständigen Werth $(R' - R)\, dp\, dq \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p$ erhält. Man unterscheide nun wohl, was §. 16. erinnert ist, nemlich ob der Punct außerhalb oder innerhalb dem Sphäroid liegt; im erstern Falle liegen die Durchschnittspuncte des Radius mit der Oberfläche auf Einer Seite des Punctes D, und die beyden Radien R und R′ sind gleichartig; im letztern liegen sie auf verschiedenen Seiten dieses Punctes, weshalb die Werthe von R und R′ einander entgegengesetzt sind, und folglich $R' - R$ die algebraische Summe der Wurzeln anzeigt, welche die quadratische Gleichung enthält, die R bestimmt. Diese Gleichung findet sich so: Es seyen x, y und z die Coordinaten für die Oberfläche, so haben wir $x^2 + my^2 + nz^2 = k^2$, da nun $x = oP = a - PH = a - LD = a - R \operatorname{Cos} p$, $y = b - R \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} q$, $z = c - R \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} q$, so wird:

$$R^2 (\operatorname{Cos} p^2 + m \operatorname{Sin} p^2 \operatorname{Cos} q^2 + n \operatorname{Sin} p^2 \operatorname{Sin} q^2) - 2R (a \operatorname{Cos} p + mb \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} q + nc \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} q) - k^2 + a^2 + mb^2 + nc^2 = o;$$

eine Gleichung aus der sich das Vorhingesagte auch algebraisch herleiten läßt. Ist nemlich der Punct D in der Oberfläche selbst befindlich, so ist $k^2 = a^2 + mb^2 + nc^2$; liegt er außer dem Sphäroid, so

ist bey denselben a und b die Ordinate c größer als vorhin, folglich $k^2 < a^2 + mb^2 + nc^2$, also das letzte Glied der Gleichung positiv. Die Gleichung enthält also in diesem Falle zwey positive Wurzeln R und R′, und R′ — R ist also die Differenz derselben. Diesen Fall lassen wir jetzt noch ununtersucht. Liegt dagegen der Punct D im Sphäroid selbst, so muß c < als in dem erstern Falle seyn, wo D in der Oberfläche ist; also ist hier $k^2 > a^2 + mb^2 + nc^2$, folglich das letzte Glied der Gleichung negativ, welches zwey entgegengesetzte Wurzeln R′ und — R giebt, deren Summe also = R′ — R ist.

Demnach wird im gegenwärtigen Falle

$$R' - R = \frac{2a \operatorname{Cos} p + 2mb \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} q + 2nc \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} q}{\operatorname{Cos} p^2 + m \operatorname{Sin} p^2 \operatorname{Cos} q^2 + n \operatorname{Sin} p^2 \operatorname{Sin} q^2},$$

und folglich, wenn man diesen Ausdruck P nennt.

$A = \int\int P\, dp\, dq \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p$, $B = \int\int P\, dp\, dq \operatorname{Sin} p^2 \operatorname{Cos} q$, $C = \int\int P\, dp\, dq \operatorname{Sin} p^2 \operatorname{Sin} q$.

§. 27.

Man nehme jetzt den Radius, durch DL gezogen, für den ersten an, und lasse den Winkel LMR = q unverändert, indem man p sich ändern läßt, so erhält man die Anziehung aller unendlich kleinen Keile, welche die Ebene DML ausfüllen: denn da diese Ebene gegen EDL allenthalben unter demselben Winkel geneigt ist, so bleibt q stets einerley, welchen Keil man auch in dieser Ebene an-

nehmen will. Man hat also für die Kraft, womit die keilförmige Fläche DLM den Punct D anzieht

nach AO das Integral $dq \int P dp \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p$

nach BO . . . . $dq \int P dp \operatorname{Sin} p^2 \operatorname{Cos} q$

nach CO . . . . $dq \int P dp \operatorname{Sin} p^2 \operatorname{Sin} q$,

und da man von dem Radius DL anfängt, und bey demselben Radius in entgegengesetzter Lage aufhören muß, so müssen die Integrale von $p = 0$ bis $p = 180°$ genommen werden. Man hat nemlich schon die Keile von zwey und zwey Radien, die einander direct gegenüber liegen, zusammen in eins gefaßt.

§. 28.

1) Die Kraft also, womit der Keil, welcher entsteht, wenn sich die Ebene DLM um dq dreht, den Punct D nach der Richtung der Axe AO anzieht, ist $= dq \int dp \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p$.

$$\frac{2a \operatorname{Cos} p + 2mb \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} q + 2nc \operatorname{Sin} p \operatorname{Sin} q}{\operatorname{Cos} p^2 + m \operatorname{Sin} p^2 \operatorname{Cos} q^2 + n \operatorname{Sin} p^2 \operatorname{Sin} q^2}.$$

2) Dies Integral besteht aus dreyen Theilen, wovon der zweyte und dritte die Eigenschaft haben, außer dp und Cos p bloß Functionen von Sin p und $\operatorname{Cos} p^2$ zu enthalten, weshalb ihre Integrale, von $p = 0$ bis $p = 180°$ genommen, $= 0$ sind (4), folglich bleibt von jenem Ausdrucke bloß das einfache Integral

$$dq \int \frac{2a\, dp \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p^2}{\operatorname{Cos} p^2 + m \operatorname{Sin} p^2 \operatorname{Cos} q^2 + n \operatorname{Sin} p^2 \operatorname{Sin} q^2}$$

übrig.

3) Dies Integral, von $p = 0$ bis $p = 180°$ genommen, giebt sodann einen Ausdruck, welcher bloß q als veränderliche Größe enthält; er sey $= Q$, so hat man $Q\,dq$ für die gedachte Anziehung. Nimmt man hiervon das Integral, so ist $\int Q\,dq$ die Summe aller Kräfte, womit die einzeln Keile zwischen zweyen unendlich nahen Ebenen MLD den Punct D anziehen, und wenn man mit diesem Integrale von $q = 0$ bis $q = 180°$ geht, oder bis zu derselben Ebene, wovon man angefangen hat, indem man sie hat in einem Halbkreise sich drehen lassen, so hat man die Anziehung des ganzen Sphäroids gegen den Punct D nach der Richtung AO.

4) Aber dies Verfahren ist beschwerlich, weil der Ausdruck unter dem Integralzeichen in Bezug auf die Größe p sehr verwickelt ist, da eben derselbe, als Function von q betrachtet, weit einfacher aussieht. Man setze diesen Ausdruck $= \Pi$, so wird $A = \int dq \int \Pi\, dp$, und dies vermöge des Hülfssatzes $s = \int dp \int \Pi\, dq$. Wird also der Werth von Π wieder hergestellt, so erhält man

$$A = \int dp \int \frac{2\,a\,dq\,\mathrm{Sin}\,p\,\mathrm{Cos}\,p^2}{\mathrm{Cos}\,p^2 + m\,\mathrm{Sin}\,p^2\,\mathrm{Cos}\,q^2 + n\,\mathrm{Sin}\,p^2\,\mathrm{Sin}\,q^2}$$

$$= 2\,a \int dp\,\mathrm{Sin}\,p\,\mathrm{Cos}\,p^2$$

$$\int \frac{dq}{\mathrm{Cos}\,p^2 + m\,\mathrm{Sin}\,p^2\,\mathrm{Cos}\,q^2 + n\,\mathrm{Sin}\,p^2\,\mathrm{Sin}\,q^2},$$

worinn beyde Integrale von 0 bis 180° genommen werden müssen.

5) Der Nenner des Bruches wird $= \text{Cos}\, p^2 + m\, \text{Sin}\, p^2 - (m - n)\, \text{Sin}\, p^2\, \text{Sin}\, q^2 = \text{Cos}\, p^2 + \frac{1}{2}(m + n)\, \text{Sin}\, p^2 + \frac{1}{2}(m - n)\, \text{Sin}\, p^2 - (m - n)\, \text{Sin}\, p^2\, \text{Sin}\, q^2 = \text{Cos}\, p^2 + \frac{1}{2}(m + n)\, \text{Sin}\, p^2 + \frac{1}{2}(m - n)\, \text{Sin}\, p^2 \,.\, \text{Cos}\, 2\, q$. Setzt man also ersteren Theil $= M$, und den Factor $\frac{1}{2}(m - n)\, \text{Sin}\, p^2$ des zweyten $= N$, so wird das erstere Integral $= \int \frac{dq}{M + N\, \text{Cos}\, 2\, q}$.

6) Um diese Formel zur Integration einzurichten, setze man zuvörderst $2q = u$, so wird $dq = \frac{1}{2} du$, also $\int \frac{dq}{M + N\, \text{Cos}\, 2\, q} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{M + N\, \text{Cos}\, u}$, welches Integral nun von $u = 0$ bis $u = 360^\circ$ genommen werden muß. Man setze ferner

$\text{Cos}\, u = \frac{1 - \omega^2}{1 + \omega^2}$, so wird $\text{Sin}\, u = \frac{2\omega}{1 + \omega^2}$,

$du\, \text{Cos}\, u = \frac{2\, d\omega\, (1 - \omega^2)}{(1 + \omega^2)^2}$, folglich $du = \frac{2\, d\omega}{1 + \omega^2}$.

Ferner wird $M + N\, \text{Cos}\, u = M + \frac{N - \omega^2 N}{1 + \omega^2}$

$= \frac{M + N + (M - N)\, \omega^2}{1 + \omega^2}$, also $\frac{du}{M + N\, \text{Cos}\, u}$

$= \frac{2\, d\omega}{M + N + \omega^2 (M - N)}$, und folglich

$$\int \frac{du}{M + N\, \text{Cos}\, u} = \frac{2}{\sqrt{(M^2 - N^2)}} \,.\, \text{arc tang} \frac{(M - N)\, \omega}{\sqrt{(M^2 - N^2)}} + \text{Const.}$$

7) Nun ist $\text{Cos}\, u + \omega^2 \text{Cos}\, u = 1 - \omega^2$, also $\omega^2 (1 + \text{Cos}\, u) = 1 - \text{Cos}\, u$, mithin $\omega = \sqrt{\left(\frac{1 - \text{Cos}\, u}{1 + \text{Cos}\, u}\right)} = \text{tang}\, \frac{1}{2} u$, folglich für $u = 0$ sowol als für $u = 360°$, $\omega = 0$. Da nun für $u = 0$ das Integral verschwindet, also $\text{Const} = 0$ wird, so erhält man für $u = 360°$ den Ausdruck $\frac{2}{\sqrt{(M^2 - N^2)}} \cdot \text{arc tang}\, 0$.

8) Ein Bogen dessen Tangente $= 0$ ist, kann überhaupt ein Vielfaches von π seyn; wir wollen daher für arc tang 0 vorläufig $n\pi$ setzen, und sehen ob sich n hier auf andere Art bestimmen lasse. Wir haben also $\int \frac{du}{M + N\, \text{Cos}\, u}$ von $u = 0$ bis $u = 2\pi$ genommen, $\frac{= 2n\pi}{\sqrt{(M^2 - N^2)}}$. Man setze $N = 0$, so wird $\int \frac{du}{M} = \frac{u}{M}$, und unter jener Voraussetzung $= \frac{2\pi}{M}$. Letzterer Ausdruck giebt dagegen $\frac{2n\pi}{M}$, also folgt: $n = 1$, und es ist also $\int \frac{du}{M + N\, \text{Cos}\, u} = \frac{2\pi}{\sqrt{(M^2 - N^2)}}$, folglich $\int \frac{dq}{M + N\, \text{Cos}\, 2q}$, als die Hälfte von jenem (6), $= \frac{\pi}{\sqrt{(M^2 - N)^2}}$

9) Da $M^2 - N^2 = (M+N)(M-N)$ $= (\mathrm{Cos}\, p^2 + m\, \mathrm{Sin}\, p^2)(\mathrm{Cos}\, p^2 + n\, \mathrm{Sin}\, p^2)$ ist, so bekommt man endlich

$$A = 2a\pi \int \frac{dp\, \mathrm{Sin}\, p\, \mathrm{Cos}\, p^2}{\sqrt{(\mathrm{Cos}\, p^2 + m \mathrm{Sin}\, p^2)} \cdot \sqrt{(\mathrm{Cos}\, p^2 + n \mathrm{Sin}\, p^2)}}$$

$$= \frac{2a\pi}{\sqrt{mn}} \int \frac{dp\, \mathrm{Sin} p\, \mathrm{Cos}\, p^2}{\sqrt{[(1 + \frac{1-m}{m} \mathrm{Cos}\, p^2)(1 + \frac{1-n}{n} \mathrm{Cos}\, p^2)]}},$$

oder wenn $\mathrm{Cos}\, p = x$ gesetzt wird, so wird

$$A = \frac{-2a\pi}{\sqrt{mn}} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{[(1 + \frac{1-m}{m} x^2)(1 + \frac{1-n}{n} x^2)]}}$$

von $x = 1$ bis $x = -1$ genommen. Dieser Ausdruck läßt sich leicht so umformen, daß er von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen werden kann. Man bemerke nemlich, daß das, was unter dem Zeichen $\int$ steht, eine Function von x^2 ist, und daß also, wenn dies Integral von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen $= P$, und eben dasselbe von $x = 1$ bis $x = -1$ genommen $= Q$ gesetzt wird, $Q = -2P$ sey (Lemma 7). Es wird also

$$A = \frac{2a\pi \cdot Q}{\sqrt{mn}} = \frac{4a\pi \cdot P}{\sqrt{mn}}$$

$$= \frac{4a\pi}{\sqrt{mn}} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{[(1 + \frac{1-m}{m} x^2)(1 + \frac{1-n}{n} x^2)]}}$$

von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen.

§. 29.

Obgleich das für A gefundene Integral

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1 + \frac{1-m}{m} x^2)(1 + \frac{1-n}{n} x^2)]}}$$

von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen werden soll, und in so fern ein bestimmtes Integral ist, so hat es doch wegen der unbestimmten Größen m und n alle Schwürigkeiten, denen das allgemeine (für keinen besondern Werth von x genommene) unterworfen ist. Ob nemlich gleich die Integrale für besondere Werthe der veränderlichen Größe sehr oft bestimmt werden können, ohne daß man das allgemeine Integral zu wissen nöthig hat, so läßt sich doch zeigen, daß dies bey gegenwärtigen durchaus unmöglich sey, und daß man sogar das allgemeine Integral aus dem besondern Werthe desselben für $x = 1$ rückwärts finden könne. Es sey nemlich

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{[(1 + \alpha x^2)(1 + \beta x^2)]}}$$ von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen $= f(\alpha, \beta)$, (irgend eine Function von α und β) so wird dasselbe von $x = 0$ bis zu jedem willkührlichen x genommen $= x^3 f(\alpha x^2, \beta x^2)$ seyn: denn man setze in demselben zx statt x, so bekommt man, indem x als beständig und nur z als veränderlich angesehen wird:

$$x^3 \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{[(1 + \alpha x^2 z^2)(1 + \beta x^2 z^2)]}},$$

wovon also der Werth von $z = 0$ bis $z = 1$

genommen $x^3 f(\alpha x^2, \beta x^2)$ seyn muß, weil hier z, αx^2, βx^2 das sind, was vorhin x, α und β waren. Es sey nun $xz = u$, so verwandelt sich letzteres Integral in $\int \frac{u^2 du}{\sqrt{[(1 + \alpha u^2)(1 + \beta u^2)]}}$ dessen Werth also, da es mit vorigem ganz einerley ist, für eben die Grenzen auch noch derselbe seyn muß; da also für $z = 0$, $u = 0$, und für $z = 1$, $u = x$ ist, so ist offenbar sein Werth von $u = 0$ bis $u = x$, ebenfalls $x^3 f(\alpha x^2, \beta x^2)$. Eben das muß auch $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{[(1 + \alpha x^2)(1 + \beta x^2)]}}$ geben, wenn es von $x = 0$ bis zu einem beliebigen x genommen wird, weil beyde einerley Integrale, dies von x, jenes von u sind, und man im erstern zuletzt $u = x$ gesetzt hat.

Hätte man also den besondern Werth für $x = 1$ von dem gegebenen Integrale gefunden, welcher ein Ausdruck aus α und β seyn müßte, so würde man den allgemeinen Werth aus diesem sogleich mit erhalten, indem man αx und βx für α und β setzte, und noch das Ganze mit x^3 multiplicirte. Es ist also unmöglich aus dem erhaltenen Integrale A zu finden, ohne zu den Reihen seine Zuflucht zu nehmen.

§. 30.

Aufgabe. Die Totalkräfte der Anziehungen nach den den beyden andern Axen parallelen Rich-

tungen, oder die Werthe von B und C aus dem Werthe von A zu finden.

Auflösung. 1) Wir hatten vorhin

$$A = \frac{4a\pi}{\sqrt{mn}} \int \frac{x^2dx}{\sqrt{[(1+\frac{1-m}{m}x^2)(1+\frac{1-n}{n}x^2)}}$$

setzt man noch im Coefficienten $\frac{3M}{k^3}$ statt $\frac{4\pi}{\sqrt{mn}}$, indem $M = \frac{4\pi k^3}{3\sqrt{mn}}$ ist, so wird $A = \frac{3aM}{k^3}$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{[(1+\frac{1-m}{m}x^2)(1+\frac{1-n}{n}x^2)]}}.$$

2) Man verwechsele die Coordinaten, und sehe y als Absciße an, so verwandelt sich die Gleichung für die Oberfläche des Sphäroids $x^2 + ny^2 + nz^2 = k^2$ in folgende: $y^2 + \frac{1}{m}x^2 + \frac{n}{m}z^2 = \frac{k^2}{m}$. Um also den Werth für B zu erhalten, darf man nur in dem für A gefundenen Ausdrucke b statt a, $\frac{1}{m}$ statt m, $\frac{n}{m}$ statt n und $\frac{k^2}{m}$ statt k^2 setzen, dadurch erhält man

$$B = \frac{3bM.m^{\frac{3}{2}}}{k^3} \int \frac{x^2dx}{\sqrt{[(1+(m-1)x^2)(1-\left(\frac{m-n}{n}\right)x^2)]}}$$

ebenfalls von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen.

3) Eben so findet man den Ausdruck für C, wenn man OZ, in der Axe OC, = MQ genommen, zur Abscisse wählt. Bey dieser Voraussetzung wird die Gleichung für die Oberfläche: $z^2 + \frac{m}{n} y^2 + \frac{1}{n} x^2 = \frac{k^2}{n}$. Diese mit der erstern verglichen, ist hier c, $\frac{m}{n}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{k^2}{n}$ was dort a, m, n und k^2 war; dies dafür in A gesetzt, giebt:

$$C = \frac{3cn^{\frac{3}{2}}M}{k^3} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{[(1+\frac{n-m}{m}x^2)(1+(n-1)x^2)]}}.$$

§. 31.

Da $\frac{M}{k^3} = \frac{4\pi}{3\sqrt{mn}}$ ist, so sieht man leicht, daß die Größen A, B, C von k unabhängig sind. Daraus folgt, daß man das Sphäroid vergrößern oder vermindern könne, (wofern nur die Verhältnißzahlen m und n unverändert bleiben) ohne daß dadurch die Anziehung desselben gegen einen im Innern liegenden Punct geändert werde. Die Bedingung, daß m und n dieselben bleiben sollen, will so viel sagen, als: die Sphäroide müssen ähnlich seyn (8), weshalb das Vorhingesagte nun so lauten wird: Zwey ähnliche und concentrische Sphäroide üben auf einen innerhalb denselben befindlichen Punct einer-

einerley Kraft nach einerley Richtung aus. Daraus folgt ferner, daß man eine Schicht, welche von zweyen concentrischen Oberflächen eingeschlossen ist, wegnehmen oder hinzufügen könne, ohne daß dadurch eine Aenderung in der Anziehung geschieht, und daß also die Würkung einer solchen Schicht auf den gedachten Punct = o seyn müsse; oder mit andern Worten: **Ein hohles Sphäroid, dessen äussere und innere Fläche ähnlich und concentrisch sind, zieht einen irgendwo in dem hohlen Raume befindlichen Punct nach allen Seiten gleich stark an.**

§. 32.

Wenn man statt der Verhältniß-Zahlen m und n die Quadrate der Eccentricitäten ϑ und π (21) in den Calcul einführt, so wird $\frac{\vartheta}{k^2} = \frac{1-m}{m}$, $1 + \frac{\vartheta}{k^2} = \frac{1}{m}$, $1 + \frac{\pi}{k^2} = \frac{1}{n}$, $\frac{k^2}{k^2+\vartheta} = m$, $\frac{\pi - \vartheta}{k^2 + \vartheta} = \frac{m-n}{n}$, und folglich:

$$A = \frac{3aM}{k^3} \cdot \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\left[\left(1+\frac{\vartheta x^2}{k^2}\right)\left(1+\frac{\pi}{k^2}x^2\right)\right]}}.$$

$$B = \frac{3bM}{(k^2+\vartheta)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\left[\left(1-\frac{\vartheta x^2}{k^2+\vartheta}\right)\left(1+\frac{\pi-\vartheta}{k^2+\vartheta}x^2\right)\right]}}.$$

3) Eben so findet man den Ausdruck für C, wenn man OZ, in der Axe OC, = MQ genommen, zur Abscisse wählt. Bey dieser Voraussetzung wird die Gleichung für die Oberfläche: $z^2 + \frac{m}{n} y^2 + \frac{1}{n} x^2 = \frac{k^2}{n}$. Diese mit der erstern verglichen, ist hier c, $\frac{m}{n}$, $\frac{1}{n}$, $\frac{k^2}{n}$ was dort a, m, n und k^2 war; dies dafür in A gesetzt, giebt:

$$C = \frac{3 c n^{\frac{3}{2}} M}{k^3} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\left[\left(1 + \frac{n-m}{m} x^2\right)\left(1 + (n-1) x^2\right)\right]}}$$

§. 31.

Da $\frac{M}{k^3} = \frac{4\pi}{3\sqrt{mn}}$ ist, so sieht man leicht, daß die Größen A, B, C von k unabhängig sind. Daraus folgt, daß man das Sphäroid vergrößern oder vermindern könne, (wofern nur die Verhältnißzahlen m und n unverändert bleiben) ohne daß dadurch die Anziehung desselben gegen einen im Innern liegenden Punct geändert werde. Die Bedingung, daß m und n dieselben bleiben sollen, will so viel sagen, als: die Sphäroide müssen ähnlich seyn (8), weshalb das Vorhingesagte nun so lauten wird: Zwey ähnliche und concentrische Sphäroide üben auf einen innerhalb denselben befindlichen Punct einer-

einerley Kraft nach einerley Richtung aus. Daraus folgt ferner, daß man eine Schicht, welche von zweyen concentrischen Oberflächen eingeschlossen ist, wegnehmen oder hinzufügen könne, ohne daß dadurch eine Aenderung in der Anziehung geschieht, und daß also die Würkung einer solchen Schicht auf den gedachten Punct = o seyn müsse; oder mit andern Worten: Ein hohles Sphäroid, dessen äussere und innere Fläche ähnlich und concentrisch sind, zieht einen irgendwo in dem hohlen Raume befindlichen Punct nach allen Seiten gleich stark an.

§. 32.

Wenn man statt der Verhältniß-Zahlen m und n die Quadrate der Eccentricitäten ϑ und π (21) in den Calcul einführt, so wird $\frac{\vartheta}{k^2} = \frac{1-m}{m}$,

$1 + \frac{\vartheta}{k^2} = \frac{1}{m}$, $1 + \frac{\pi}{k^2} = \frac{1}{n}$, $\frac{k^2}{k^2+\vartheta} = m$, $\frac{\pi-\vartheta}{k^2+\vartheta} = \frac{m-n}{n}$, und folglich:

$$A = \frac{3aM}{k^3} \cdot \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\left[\left(1+\frac{\vartheta x^2}{k^2}\right)\left(1+\frac{\pi}{k^2}x^2\right)\right]}}.$$

$$B = \frac{3bM}{(k^2+\vartheta)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\left[\left(1-\frac{\vartheta x^2}{k^2+\vartheta}\right)\left(1+\frac{\pi-\vartheta}{k^2+\vartheta}x^2\right]}}.$$

$$C = \frac{3cM}{(k^2+\pi)^{\frac{3}{2}}} \cdot \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\left[\left(1+\frac{\vartheta-\pi}{k^2+\pi}x^2\right)\left(1-\frac{\pi x^2}{k^2+\pi}\right)\right]}}.$$

Es sey ferner $\frac{\vartheta}{k^2} = \mu^2$, $\frac{\pi}{k^2} = \mu'^2$, so verwandelt sich der in A vorkommende Integralausdruck in $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1+\mu^2 x^2)} \cdot \sqrt{(1+\mu'^2 x^2)}}$, welcher von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen, eine Function von μ und μ' giebt, die wir mit F bezeichnen wollen.

§. 33.

Der Ausdruck $\frac{\mu x^2}{\sqrt{(1+\mu^2 x^2)} \cdot \sqrt{(1+\mu'^2 x^2)}}$ mag P heißen, so ist $\int \left(\frac{dP}{d\mu}\right) dx = C + \left(\frac{d\int P dx}{d\mu}\right)$ (Lemma 2), und diese Gleichung bleibt noch wahr, wenn sowol das Integral $\int P dx$, als auch das linker Hand, von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen werden, in welchem Falle $C = 0$ wird, weil alsdann auch $d\left(\frac{\int P dx}{d\mu}\right)$ für $x = 0$ verschwindet. Da nun $\left(\frac{dP}{d\mu}\right) = \frac{x^2}{(1+\mu^2 x^2)^{\frac{3}{2}}(1+\mu'^2 x^2)^{\frac{1}{2}}}$ ist, so wird $\left(\frac{d\int P dx}{d\mu}\right) = \left(\frac{dF\mu}{d\mu}\right)$

$$= \int \frac{x^2 dx}{(1+\mu^2 x^2)^{\frac{3}{2}}(1+\mu'^2 x^2)^{\frac{1}{2}}}$$ von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen.

§. 34.

Nach gehöriger Substitution verwandelt sich B in folgenden Ausdruck:

$$\frac{3bM}{k^3(1+\mu^2)^{\frac{3}{2}}}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{\left[\left(1-\frac{\mu^2x}{1+\mu^2}\right)\left(1+\frac{\mu'^2-\mu^2}{1+m^2}x^2\right)\right]}}.$$

Setzt man in diesem $x=\frac{t\sqrt{(1+\mu^2)}}{\sqrt{(1+\mu^2t^2)}}$, so wird

$$dx=\frac{\sqrt{(1+\mu^2)}\,dt}{\sqrt{(1+\mu^2t^2)}}-\frac{\mu^2t^2\sqrt{(1+\mu^2)}\,dt}{(1+\mu^2t^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{dt\sqrt{(1+\mu^2)}}{(1+\mu^2t^2)^{\frac{3}{2}}};\ \sqrt{\left(1-\frac{\mu^2x^2}{1+\mu^2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{(1+\mu^2t^2)}}$$

und $\sqrt{\left(1+\frac{\mu'^2-\mu^2}{1+\mu^2}x^2\right)}=\frac{\sqrt{(1+\mu'^2t^2)}}{\sqrt{(1+\mu^2t^2)}}$,

also, nach angestellter Reduction,

$$B=\frac{3bM}{k^3}\int\frac{t^2dt}{(1+\mu^2t^2)^{\frac{3}{2}}(1+\mu'^2t^2)^{\frac{1}{2}}},$$ von

$t=0$ bis $t=1$ genommen, weil für $x=0$ und 1, auch t die Werthe 0 und 1 bekommt. Da dies Integral mit dem im vorigen § vorkommenden völlig einerley Form hat, oder die Größe t eben so enthält, als jenes die Größe x, so geben beyde auch einerley Werth, weil zugleich in beyden die Grenzen, womit sie anfangen und wie weit sie genommen werden sollen, einerley sind. Es folgt also hieraus, daß $B=\frac{3bM}{k^3}\left(\frac{d\mu F}{d\mu}\right)$ sey, und durch einen ähnlichen Calcul, indem man in

C, $x = \frac{t\sqrt{(1+\mu'^2)}}{\sqrt{(1+\mu'^2 t^2)}}$ setzt, findet man

$$C = \frac{3cM}{k^3} \cdot \left(\frac{d\mu' F}{d\mu'}\right).$$

§. 35.

Für ein durch Umdrehung entstandenes Sphäroid ist $m = n$, also $\vartheta = \pi$, und folglich $\mu = \mu'$. In diesem Falle wird daher F eine bloße Function von μ, und da vorhin in F die Größen μ und μ' auf einerley Weise befindlich waren, so ist für $\mu = \mu'$, $\left(\frac{dF}{d\mu}\right) = \left(\frac{dF}{d\mu'}\right)$; nennt man also $\left(\frac{dF}{d\mu}\right)'$ in gegenwärtigem Falle das vollständige Differenzial, worinn auf keinen Unterschied zwischen μ und μ' gesehen wird, so ist $\left(\frac{dF}{d\mu}\right)' = \left(\frac{dF}{d\mu}\right) + \left(\frac{dF}{d\mu'}\right)$

$= 2\left(\frac{dF}{d\mu}\right)$. Demnach wird $\left(\frac{d\mu F}{d\mu}\right) = F$

$$+ \mu\left(\frac{dF}{d\mu}\right) = F\,\frac{\mu}{2} \cdot \left(\frac{dF}{d\mu}\right)' = \frac{1}{2\mu}$$

$\left[2\mu F + \mu^2\left(\frac{dF}{d\mu}\right)'\right] = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{d\mu^2 F}{d\mu}\right)'$, und auf gleiche Weise $\left(\frac{d\mu' F}{d\mu'}\right) = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{d\mu^2 F}{d\mu}\right)'$, also hat man für das Rotations-Sphäroid: $A = \frac{3aM}{k^3}.F$,

$$B = \frac{3bM}{2k^3\mu}\left(\frac{d\mu^2 F}{d\mu}\right)',\quad C = \frac{3cM}{2k^3\mu}\left(\frac{d\mu^2 F}{d\mu}\right)'.$$

§. 36.

Aufgabe. Die für das Rotations-Sphäroid gefundenen Ausdrücke für A, B und C zu entwickeln.

Auflösung. 1) Es wird im gedachten Falle $F = \int \frac{x^2 dx}{1 + \mu^2 x^2}$ von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen. Nun ist $\frac{\mu^2 x^2 dx}{1 + \mu^2 x^2} = dx = \frac{dx}{1 + \mu^2 x^2}$, also $\mu^2 \int \frac{x^2 dx}{1 + \mu^2 x^2} = x - \frac{1}{\mu}$ arc tang μx, wo keine Constante hinzukommt, weil der Ausdruck von selbst für $x = 0$ verschwindet, wie verlangt wird; man hat also $\int \frac{x^2 dx}{1 + \mu^2 x^2} = \frac{1}{\mu^3}(\mu x - \text{arc tang}\, \mu x)$, folglich für $x = 1$, $F = \frac{1}{\mu^3}(\mu - \text{arc tang}\, \mu)$;

ferner $\left(\frac{d\mu^2 F}{d\mu}\right) = \frac{d(1 - \frac{1}{\mu} \cdot \text{arc tang}\, \mu)}{d\mu}$

$$= \frac{-1}{\mu(1 + \mu^2)} + \frac{\text{arc tang}\, \mu}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2}$$

$\left(\text{arc tang}\, \mu - \frac{\mu}{1 + \mu^2}\right)$, und folglich wird

$$A = \frac{3aM}{k^3 \mu^3}(\mu - \text{arc tang}\, \mu), \quad B = \frac{3bM}{2k^3 \mu^3}$$

$$\left(\text{arc tang}\,\mu - \frac{\mu}{1+\mu^2}\right) C = \frac{3\,c\,M}{2\,k^3\,\mu^3}$$

$$\left(\text{arc tang}\,\mu - \frac{\mu}{1+\mu^2}\right.\,.$$

§. 37.

Wenn sich die Größen A, B, C bey ungleichen Eccentricitäten nicht, wie beym Rotations-Sphäroid, durch exacte Formeln darstellen lassen, so kann man doch wenigstens die Werthe von F, $\left(\frac{d\,\mu\,F}{d\mu}\right)$, $\left(\frac{d\,\mu'F}{d\mu'}\right)$ näherungsweise durch Reihen die nach μ und μ' fortgehen, ausdrücken, die allemal sehr schnell convergiren werden, wenn das Sphäroid nicht sehr von der Kugel abweicht. Da in der Folge diese Reihen nöthig seyn werden, so wollen wir die Rechnung vorläufig auseinander setzen. Wenn man den Nenner des Integrals (32), woraus F erhalten wird, entwickelt, so bekommt man:

$\int x^2 dx \left(1 - \frac{1}{2}\mu^2 x^2 + \frac{3}{8}\mu^4 x^4 - \frac{5}{16}\mu^6 x^6 \ldots\right)$ $\left(1 - \frac{1}{2}\mu'^2 x^2 + \frac{3}{8}\mu'^4 x^4 - \ldots\right)$, oder wirklich multiplicirt:

$$\int x^2 dx \left(\begin{array}{llll} 1 & -\frac{1}{2}\mu^2 x & +\frac{3}{8}\mu^4 x^4 & -\frac{5}{16}\mu^6 x^6 \\ & -\frac{1}{2}\mu'^2 & +\frac{1}{4}\mu^2\mu'^2 & -\frac{3}{16}\mu^4\mu'^2 \\ & & +\frac{3}{8}\mu'^4 & -\frac{3}{16}\mu^2\mu'^4 \\ & & & -\frac{5}{16}\mu'^6 \end{array}\right. =$$

$$\frac{1}{3}x^3 - \left(\begin{array}{l}\frac{1}{10}\mu^2 \\ -\frac{1}{10}\mu'^2\end{array}\right) x^5 + \left(\begin{array}{l}\frac{3}{56}\mu^4 \\ +\frac{1}{28}\mu'\mu'^2 \\ +\frac{3}{56}\mu'^4\end{array}\right) x^7 - \left(\begin{array}{l}\frac{1}{144}\mu^6 \\ -\frac{3}{144}\mu^4\mu'^2 \\ -\frac{3}{144}\mu^2\mu'^4 \\ -\frac{5}{144}\mu'^6\end{array}\right) x^9 + \ldots$$

also $x = 1$ gesetzt:

$$F = \frac{1}{3} - \frac{1}{10}\mu^2 - \frac{1}{10}\mu'^2 + \frac{3}{56}\mu^4 + \frac{1}{28}\mu^2\mu'^2 + \frac{3}{56}\mu'^4 - \frac{5}{144}\mu^6 - \ldots$$

Daraus wird dann $\left(\frac{d\mu F}{d\mu}\right) = \frac{1}{3} - \frac{3}{10}\mu^2 - \frac{1}{10}\mu'^2 + \frac{15}{56}\mu^4 + \ldots$, und $\left(\frac{d\mu' F}{d\mu}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{10}\mu^2 - \frac{3}{10}\mu'^2 + \frac{3}{56}\mu^4 + \frac{3}{28}\mu^2\mu'^2 + \frac{15}{56}\mu'^4 - \ldots$

Attraction des Sphäroids gegen einen ausser demselben befindlichen Punct.

§. 38.

Dadurch, daß der Punct D zum Anfangspuncte der Axe DL angenommen wurde, worauf sich die beyden Winkel p und q, nebst dem Radius r bezogen, bekamen wir folgende Gleichungen (24, 7) $A = \int\int\int . \, dr\, dp\, dq \,\mathrm{Sin}\, p\, \mathrm{Cos}\, p$, $B = \int\int\int dr\, dp\, dq\, \mathrm{Sin}\, p^2\, \mathrm{Cos}\, q$, $C = \int\int\int dr\, dp\, dq\, \mathrm{Sin}\, p^2\, \mathrm{Sin}\, q$. Außerdem wird auch noch V, als das dreyfache Integral von $\frac{dM}{r} = \int\int\int r dr\, dp\, dq\, \mathrm{Sin}\, p$. Ferner erhielten wir durch Integration in Bezug auf r:

$A = \int\int (R' - R)\, dp\, dq\, \mathrm{Sin}\, p\, \mathrm{Cos}\, p$, $B = \int\int (R' - R)\, dp\, dq\, \mathrm{Sin}\, p^2\, \mathrm{Cos}\, q$, $C = \int\int (R' - R)\, dp\, dq\, \mathrm{Sin}\, p^2\, \mathrm{Sin}\, q$, und auf die angezeigte Weise bey V verfahren, wird $V = \frac{1}{2} \int\int (R'^2 - R^2)\, dp\, dq\, \mathrm{Sin}\, p = \frac{1}{2} \int\int (R' + R)(R' - R)\, dp\, dq\, \mathrm{Sin}\, p$.

Für den bis an die Oberfläche fortgesetzten Radius R fanden wir folgende Gleichung:

$R^2 (\mathrm{Cos}\, p^2 + m^2 \mathrm{Sin}\, p^2 \mathrm{Cos}\, q^2 + n^2 \mathrm{Sin}\, p^2 \mathrm{Sin}\, q^2) - 2 R (a \mathrm{Cos}\, p + mb \mathrm{Sin}\, p \mathrm{Cos}\, q + nc \mathrm{Sin}\, p \mathrm{Sin}\, q) - k^2 + a^2 + mb^2 + nc^2 = o$, und deren Wurzeln sind in gegenwärtigem Falle, wo der Punct außerhalb dem Sphäroide liegt, beyde positiv, so daß also in den Ausdrücken A, B und C die Differenz dieser Wurzeln vorkommt. Man drücke der Kürze wegen diese Gleichung folgendermaaßen aus: $R^2 L - 2 R N - k^2 + a^2 + mb^2 + nc^2 = o$, so hat man $R = \frac{N}{L} \mp \sqrt{\left[\frac{N^2}{L^2} + \left(\frac{k^2 - a^2 - mb^2 - nc^2}{L}\right)\right]}$

$$= \frac{N \mp \sqrt{[N^2 + (k^2 - a^2 - mb^2 - nc^2) L]}}{L},$$

oder setzt man $N^2 + (k^2 - a^2 - mb^2 - nc^2) L = Q$, so werden die beyden Wurzeln $R' = \frac{N + \sqrt{Q}}{L}$, $R = \frac{N - \sqrt{Q}}{L}$, also $R' + R = \frac{2N}{L}$, und $R' - R = \frac{2\sqrt{Q}}{L}$, und wir erhalten für obige Größen:

$V = 2 \iint dp\, dq\, \mathrm{Sin}\, p\, \frac{N\sqrt{Q}}{L^2}$, $A = 2 \iint dp\, dq\, \mathrm{Sin}\, p\, . \frac{\sqrt{Q}}{L}$, $B = 2 \iint dp\, dq\, \mathrm{Sin}\, p^2\, \mathrm{Cos}\, q\, . \frac{\sqrt{Q}}{L}$, $C = 2 \iint dp\, dq\, \mathrm{Sin}\, p\, \frac{\sqrt{Q}}{L}$.

§. 39.

Vermöge des Lemmas 3 hat man:

$$\left(\frac{dV}{da}\right) = 2\int\int dp\, dq\, \text{Sin}\, p \frac{\left[d\left(\frac{N\sqrt{Q}}{L^2}\right)\right]}{da}, \text{ und}$$

auf gleiche Art erhält man die partiellen Differenziale $\left(\frac{dA}{dk}\right)$, $\left(\frac{dA}{db}\right)$ u. s. f., indem man die Functionen dieser Größen k, b, c u. s. f. unter dem Integralzeichen differenziirt. Dies vorausgesetzt, bekommt man durch würkliche Differenziirung die weiter nicht verwickelt ist:

$$\left(\frac{dA}{db}\right) = 2m\int\int dp\, dq\, \text{Sin}\, p^2\, \text{Cos}\, p\, \text{Cos}\, q \cdot \frac{N}{L\sqrt{Q}}$$

$$- 2bm\int\int dp\, dq\, \text{Sin}\, p\, \text{Cos}\, p \cdot \frac{1}{\sqrt{Q}}$$

$$\left(\frac{dA}{dc}\right) = 2n\int\int dp\, dq\, \text{Sin}\, p^2\, \text{Cos}\, p\, \text{Sin}\, q \cdot \frac{N}{L\sqrt{Q}}$$

$$- 2cn\int\int dp\, dq\, \text{Sin}\, p\, \text{Cos}\, p \cdot \frac{1}{\sqrt{Q}}$$

$$\left(\frac{dA}{dm}\right) = 2b\int\int dp\, dq\, \text{Sin}\, p^2\, \text{Cos}\, p\, \text{Cos}\, q \cdot \frac{N}{L\sqrt{Q}}$$

$$- b^2\int\int dp\, dq\, \text{Sin}\, p\, \text{Cos}\, p \cdot \frac{1}{\sqrt{Q}}$$

$$+ (k^2 - a^2 - mb^2 - nc^2)\int\int dp\, dq\, \text{Sin}\, p^3\, \text{Cos}\, p\, \text{Cos}\, q^2 \cdot \frac{1}{L\sqrt{Q}} - 2\int\int dp\, dq\, \text{Sin}\, p^3\, \text{Cos}\, p\, \text{Cos}\, q^2\, \frac{\sqrt{Q}}{L^2}$$

$$\left(\frac{dA}{dn}\right) = 2c\int\int dp\, dq\, \text{Sin}\, p^2\, \text{Cos}\, p$$

$\mathrm{Sin}\, q \cdot \frac{N}{L\sqrt{Q}} - c^2 \int\int dp\, dq\, \mathrm{Sin}\, p\, \mathrm{Cos}\, p \cdot \frac{1}{\sqrt{Q}}$
$+ (k^2 - a^2 - mb^2 - nc^2) \cdot \int\int dp\, dq\, \mathrm{Sin}\, p^3$
$\mathrm{Cos}\, p\, \mathrm{Sin}\, q^2 \frac{1}{L\sqrt{Q}} - 2 \int\int dp\, dq\, \mathrm{Sin}\, p^3\, \mathrm{Cos}\, p$
$\mathrm{Sin}\, q^3 \cdot \frac{\sqrt{Q}}{L^2}$ · Endlich

$\left(\frac{dV}{da}\right) = 2\int\int dp\, dq\, \mathrm{Sin}\, p\, \mathrm{Cos}\, p \frac{\sqrt{Q}}{L^2} + 2\int\int dp\, dq\, \mathrm{Sin}\, p$
$\mathrm{Cos}\, p \cdot \frac{N^2}{L^2\sqrt{Q}} - 2\, a \int\int dp\, dq\, \mathrm{Sin}\, p \cdot \frac{N}{L\sqrt{Q}}$ und
$\left(\frac{dV}{dk}\right) = 2\, k \int\int dp\, dq\, \mathrm{Sin}\, p \cdot \frac{N}{L\sqrt{Q}}$ ·

§. 40.

1) Zwischen diesen partiellen Differenzialen giebt es eine Gleichung, die ihre Beziehung auf einander bestimmt. Um sie heraus zu bringen, setze man $\alpha \left(\frac{dA}{db}\right) + \beta \left(\frac{dA}{dc}\right) + \gamma \left(\frac{dA}{dk}\right) + \delta \left(\frac{dA}{dm}\right) + \varepsilon \left(\frac{dA}{dn}\right) + \zeta A + \eta \left(\frac{dV}{da}\right) + \vartheta \left(\frac{dV}{dk}\right) = o$, und der Kürze wegen $k^2 - a^2 - mb^2 - nc^2 = h$, so wird nach geschehener Substitution der im vorigen § erhaltenen Werthe: $o = \int\int dp . dq$
$\Big(2\alpha m\, \mathrm{Sin}\, p^2\, \mathrm{Cos}\, p\, \mathrm{Cos}\, q \frac{N}{L\sqrt{Q}} - 2\, \alpha b m\, \mathrm{Sin}\, p$
$\mathrm{Cos}\, p \cdot \frac{1}{\sqrt{Q}} + 2\, \beta\, m\, \mathrm{Sin}\, p^2\, \mathrm{Cos}\, p\, \mathrm{Sin}\, q \cdot \frac{N}{L\sqrt{Q}}$

$- 2\beta cn \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p \cdot \frac{1}{\sqrt{Q}} + 2\gamma k \operatorname{Sin} p$

$\operatorname{Cos} p \cdot \frac{1}{\sqrt{Q}} + 2\delta b \operatorname{Sin} p^2 \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} q \cdot \frac{N}{L\sqrt{Q}}$

$- b^2 \delta \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p \cdot \frac{1}{\sqrt{Q}} + h\delta \operatorname{Sin} p^3 \operatorname{Cos} p$

$\operatorname{Cos} q^2 \cdot \frac{1}{L\sqrt{Q}} - 2\delta \operatorname{Sin} p^3 \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} q^2 \cdot \frac{\sqrt{Q}}{L^2}$

$+ 2\varepsilon c \operatorname{Sin} p^2 \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin} q \cdot \frac{N}{L\sqrt{Q}} - c^2 \varepsilon \operatorname{Sin} p$

$\operatorname{Cos} p \cdot \frac{1}{\sqrt{Q}} + h\varepsilon \operatorname{Sin} p^3 \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin} q^2 \cdot \frac{1}{L\sqrt{Q}}$

$- 2\varepsilon \operatorname{Sin} p^3 \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin} q^2 \frac{\sqrt{Q}}{L^2} + 2\zeta \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p \frac{\sqrt{Q}}{L}$

$+ 2\eta \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p \frac{\sqrt{Q}}{L^2} + 2\eta \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p \cdot \frac{N^2}{L^2\sqrt{Q}} -$

$- 2\alpha\eta \operatorname{Sin} p \cdot \frac{N}{L\sqrt{Q}} + 2k\vartheta \operatorname{Sin} p \cdot \frac{N}{L\sqrt{Q}}\Big),$

weshalb also auch das, was unter dem Einschließungszeichen steht $= 0$ seyn muß.

2) Hier fällt sogleich in die Augen, daß, um die Glieder, welche $\frac{N}{L\sqrt{Q}}$ enthalten, gegeneinander aufzuheben, man nur $2\alpha m = -2\delta b$, $2\beta n = -2\varepsilon c$, und $2\alpha\eta = 2k\vartheta$ setzen dürfe, wodurch $\delta = -\frac{\alpha m}{b}$, $\varepsilon = -\frac{\beta n}{c}$ und $\vartheta = \frac{\alpha\eta}{k}$ wird.

3) Man setze ferner statt $2\eta \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p \frac{\sqrt{Q}}{L^2}$, $4\eta \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p \frac{\sqrt{Q}}{L^2} - 2\eta \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p \frac{\sqrt{Q}}{L^2}$, und verbinde mit letzterem das Glied $2\eta \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p . \frac{N^2}{L^2 \sqrt{Q}}$, so geben beyde zusammen $- 2\eta \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p . \frac{Q - N^2}{L^2 \sqrt{Q}}$, welches noch $= - 2\eta h \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p . \frac{1}{L \sqrt{Q}}$ wird.

4) Man verwandele $2\zeta \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p \frac{\sqrt{Q}}{L}$ in $2\zeta \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p . L . \frac{\sqrt{Q}}{L^2}$, und substituire statt L seinen Werth in 38, so wird dies Glied $= 2\zeta \operatorname{Sin} p \operatorname{Cos} p^3 \frac{\sqrt{Q}}{L^2} + 2m\zeta \operatorname{Sin} p^3 \operatorname{Cos} p \operatorname{Cos} q^2 . \frac{\sqrt{Q}}{L^2} + 2n\zeta \operatorname{Sin} p^3 \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin} q^2 . \frac{\sqrt{Q}}{L^2}$. Diese letztern beyden mit den Gliedern der obigen Gleichung, welche $\operatorname{Sin} q^2 \frac{\sqrt{Q}}{L^2}$ und $\operatorname{Cos} q^2 . \frac{\sqrt{Q}}{L^2}$ enthalten, verbunden und die daraus entspringenden Coefficienten gleich gesetzt, giebt $2m\zeta - 2\delta = 2n\zeta - 2\varepsilon$, woraus $\zeta = \frac{2(\delta - \varepsilon)}{2(m - n)} = \frac{\delta - \varepsilon}{m - n}$ wird. Dadurch lassen sich gedachte Glieder vereinigen, und aus beyden wird zusammengenommen $(2m\zeta - 2\delta) \operatorname{Sin} p^3 \operatorname{Cos} p \frac{\sqrt{Q}}{L^2}$.

5) Man setze diesen Coefficienten $= 2\zeta$, dem Coefficienten des aus (4) noch übrigen Gliedes 2ζ $\mathrm{Sin}\, p\, \mathrm{Cos}\, p^3 \frac{\sqrt{Q}}{L^2}$, so wird $2(m-1)\zeta - 2\delta = 0$, also $\zeta = \frac{\delta}{m-1} = \frac{\varepsilon}{n-1}$ (4), und $(n-1)\delta = (m-1)\varepsilon$. Dadurch gehen auch diese beyden Glieder in eins zusammen, und geben $2\zeta\, \mathrm{Sin}\, p\, \mathrm{Cos}\, p \frac{\sqrt{Q}}{L^2}$; und wenn sich dies mit dem aus (3) noch rückständigen Gliede $4\eta\, \mathrm{Sin}\, p\, \mathrm{Cos}\, p \frac{\sqrt{Q}}{L^2}$ heben soll, so wird $\eta = -\frac{1}{2}\zeta$.

6) Da jetzt alle Glieder weggeschafft sind, welche N und $\frac{\sqrt{Q}}{L^2}$ enthalten, und in den übrigen nur noch $\frac{1}{\sqrt{Q}}$ und $\frac{1}{L\sqrt{Q}}$ befindlich ist, so setze man $\frac{L}{L\sqrt{Q}}$ statt $\frac{1}{\sqrt{Q}}$, und substituire für L im Zähler seinen Werth; alsdann entstehen lauter Glieder, welche den Factor $\frac{1}{L\sqrt{Q}}$ enthalten. Nimmt man diese mit dem in (3) noch rückständigen Gliede $-2\eta h\, \mathrm{Sin}\, p\, \mathrm{Cos}\, p \frac{1}{L\sqrt{Q}}$ zusammen, und läßt den gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{L\sqrt{Q}}$ weg, so erhält man:

$o = (2\gamma k - \alpha bm - \beta en) \text{ Sin } p \text{ Cos } p^3 + (2\gamma km + h\delta - \alpha bm^2 - \beta emn) \cdot \text{Sin } p^3 \text{ Cos } p \text{ Cos } q^2 + (h\varepsilon + 2\gamma kn - \alpha bmn - \beta en^2) \text{ Sin } p^3 \text{ Cos } q \text{ Sin } q^2 - 2\eta h \text{ Sin } p \text{ Cos } p$.

7) Man setze den Coefficienten des erstern Gliedes $= f$, so wird der des zweyten $= fm + h\delta$, und der des dritten $= fn + h\varepsilon$. Letztere beyden gleich gesetzt, geben $f(m - n) = h(\varepsilon - \delta)$, und daraus wird (4), $f = -h\zeta$. Die beyden Glieder werden dadurch vereinbar, und machen zusammen $(fm + h\delta) \text{ Sin } p^3 \text{ Cos } p = f \text{ Sin } p^3 \text{ Cos } p$, indem $fm = - mh\zeta$, und $h\delta = (m - 1) h\zeta$ ist: und dies Glied, mit dem erstern verbunden, giebt $f \text{ Sin } p \text{ Cos } p$, welches endlich mit $- 2\eta h \text{ Sin } p \text{ Cos } p$ sich heben muß, wodurch $f = 2\eta h$ wird, welches schon von selbst aus (5) folgt.

8) Weil wir allen Gliedern der Gleichung (1) Coefficienten gegeben haben, so bleibt offenbar einer unter ihnen unbestimmt. Man setze daher $\zeta = -1$, so wird $\delta = -(m - 1)$, $\varepsilon = -(n - 1)$, also $\alpha = \frac{(m - 1) b}{m}$, und $\beta = \frac{(n - 1) c}{n}$, ferner $\eta = + \frac{1}{2}$, $\vartheta = + \frac{a}{2k}$. Endlich $f = 2\gamma k - (m - 1) b^2 - (n - 1) c^2 = h = k^2 - a^2 - mb^2 - nc^2$ also $2\gamma k + b^2 + c^2 = k^2 - a^2$, und daher $\gamma = \frac{k^2 - a^2 - b^2 - c^2}{2k}$, weshalb die gesuchte Gleichung folgende wird:

$$o = \frac{m-1}{m} \cdot b\left(\frac{dA}{db}\right) + \frac{n-1}{n} \cdot c\left(\frac{dA}{dc}\right)$$
$$+ \left(\frac{k^2 - a^2 - b^2 - c^2}{2k}\right) \cdot \left(\frac{dA}{dk}\right) - (m-1)$$
$$\left(\frac{dA}{dm}\right) - (n-1)\left(\frac{dA}{dn}\right) - A + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dV}{da}\right)$$
$$+ \frac{a}{2k}\left(\frac{dV}{dk}\right).$$

9) Nach der Ausführung dieses Calculs wird man nun selbst sich leicht überzeugen können, daß es auch zwischen den partiellen Differenzialen von B und V, so wie zwischen denen von C und V, folgende Gleichungen statt finden:

$$o = \left(\frac{m-1}{m}\right) b\left(\frac{dB}{db}\right) + \left(\frac{n-1}{n}\right) c\left(\frac{dB}{dc}\right)$$
$$+ \frac{k^2 - a^2 - b^2 - c^2}{2k} \cdot \left(\frac{dB}{dk}\right) - (m-1)\left(\frac{dB}{dm}\right)$$
$$- (n-1)\left(\frac{dB}{dn}\right) - B + \frac{1}{2m}\left(\frac{dV}{db}\right) + \frac{b}{2k}\left(\frac{dV}{dk}\right)$$

$$o = \left(\frac{m-1}{m}\right) b\left(\frac{dC}{db}\right) + \left(\frac{n-1}{n} c\left(\frac{dC}{dc}\right)\right.$$
$$+ \frac{k^2 - a^2 - b^2 - c^2}{2k} \cdot \left(\frac{dC}{dk}\right) - (m-1)\left(\frac{dC}{dm}\right)$$
$$- (n-1)\left(\frac{dC}{dn}\right) - C + \frac{1}{2n}\left(\frac{dV}{dc}\right) + \frac{c}{2k}$$
$$\left(\frac{dV}{dk}\right).$$

§. 41.

1) Man setze $V = Mv$, wo M die Masse des Sphäroids bedeute, welche $= \frac{4\pi k^3}{3\sqrt{mn}}$ ist (9), so wird $\left(\frac{dV}{dk}\right) = v\left(\frac{dM}{dk}\right) + M\left(\frac{dv}{dk}\right)$ $= \frac{M}{k}\left[3v + k\left(\frac{dv}{dk}\right)\right]$. Führt man nun wieder die Größen $\vartheta = \frac{k^2(1-m)}{m}$ und $\pi = \frac{k^2(1-n)}{n}$ in den Calcul ein, so wird: $\left(\frac{d\vartheta}{dk}\right) = \frac{2\vartheta}{dk}$, $\left(\frac{d\pi}{dk}\right)$ $= \frac{2\pi}{k}$ $\left(\frac{d\vartheta}{dm}\right) = -\frac{k^2}{m^2}$, $\left(\frac{d\pi}{dn}\right) = -\frac{k^2}{n^2}$, also $\left(\frac{dk}{d\vartheta}\right) = \frac{k}{2\vartheta}$, $\left(\frac{dk}{d\pi}\right) = \frac{k}{2\pi}$, und folglich: $\left(\frac{dv}{d\vartheta}\right)$ $= \left(\frac{dv}{dk}\right)\left(\frac{dk}{d\vartheta}\right) = \frac{k}{2\vartheta}\left(\frac{dv}{dk}\right)$, und $\left(\frac{dv}{d\pi}\right)$ $= \frac{k}{2\pi}\left(\frac{dv}{dk}\right)$, also $2\vartheta\left(\frac{dv}{d\vartheta}\right) + 2\pi\left(\frac{dv}{d\pi}\right)$ $= k\left(\frac{dv}{dk}\right) + k\left(\frac{dv}{dk}\right) = 2k\left(\frac{dv}{dk}\right)$, folglich

$$\left(\frac{dV}{dk}\right) = \frac{M}{k}\left[2\vartheta\left(\frac{dv}{d\vartheta}\right) + 2\pi\left(\frac{dv}{d\pi}\right) + 3v - k\left(\frac{dv}{dk}\right)\right].$$

2) Eben

2) Eben so erhält man $\left(\frac{dV}{dm}\right)$
$= - M \left(\frac{k^2}{m^2}\left(\frac{dv}{d\vartheta}\right) + \frac{v}{2m}\right)$, und $\left(\frac{dV}{dn}\right)$
$= - M \left(\frac{k^2}{n^2}\left(\frac{dv}{d\pi}\right) + \frac{v}{2n}\right)$.

3) Man bringe nun die Differenziale der Gleichung (40, 8) auf die von v, indem man für A seinen Werth $-\left(\frac{dV}{da}\right)$ setzt, wodurch $\left(\frac{dA}{db}\right)$ $= -\left(\frac{ddV}{dadb}\right) = - M\left(\frac{ddv}{dadb}\right)$, und eben so $\left(\frac{dA}{dc}\right) = - M\left(\frac{ddv}{dadc}\right)$ wird.

Ferner hat man $\left(\frac{dA}{dk}\right) = -\left(\frac{d\left(\frac{dV}{da}\right)}{dk}\right)$

$$= -\left(\frac{d\left(\frac{dV}{dk}\right)}{da}\right) = - \frac{M}{k}\left(2\vartheta\left(\frac{ddv}{dad\vartheta}\right)\right.$$
$$\left. + 2\pi\left(\frac{ddv}{dad\pi}\right) + 3\left(\frac{dv}{da}\right) - k\left(\frac{ddv}{dadk}\right)\right),$$

und auf gleiche Weise $\left(\frac{dA}{dm}\right) = + M\left[\frac{k^2}{m^2}\left(\frac{ddv}{dad\vartheta}\right)\right.$ $\left. + \frac{1}{2m}\left(\frac{dv}{da}\right)\right]$, $\left(\frac{dA}{dn}\right) = M\left(\frac{k^2}{n^2}\left(\frac{ddv}{dad\pi}\right)\right.$ $\left. + \frac{1}{2n}\left(\frac{dv}{da}\right)\right)$.

4) Werden diese Werthe der Reihe nach substituirt, so verwandelt sich gedachte Gleichung in folgende:

$$o = \frac{\vartheta M b}{k^2}\left(\frac{ddv}{da\,db}\right) + \frac{\pi M c}{k^2}\left(\frac{ddv}{da\,dc}\right)$$

$$+ \frac{(a^2 + b^2 + c^2 - k^2)}{2k^2} M \left(2\vartheta \left(\frac{ddv}{d\vartheta\, da}\right)\right.$$

$$\left. + 2\pi\left(\frac{ddv}{d\pi\, da}\right) + 3\left(\frac{dv}{da}\right) - k\left(\frac{ddv}{da\,dk}\right)\right)$$

$$+ \frac{\vartheta M}{k^2}\left[\frac{k^2}{m}\left(\frac{ddv}{d\vartheta\, da}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dv}{da}\right)\right] + \frac{\pi M}{k^2}$$

$$\left[\frac{k^2}{n}\left(\frac{ddv}{d\pi\, da}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dv}{da}\right)\right] + \tfrac{3}{2} M \left(\frac{dv}{da}\right)$$

$$+ \frac{aM}{2k^2}\left[2\vartheta\left(\frac{dv}{d\vartheta}\right) + 2\pi\left(\frac{dv}{d\pi}\right)\right.$$

$$\left. + 3v - k\left(\frac{dv}{dk}\right)\right].$$

5) Verbindet man in dieser diejenigen Glieder mit einander, welche einerley Differenziale von v enthalten und dividirt allenthalben mit $\frac{M}{k^2}$ so bekommt sie noch folgende Gestalt:

$$o = (a^2 + b^2 + c^2 + \vartheta)\,\vartheta\left(\frac{ddv}{da\,d\vartheta}\right)$$

$$+ (a^2 + b^2 + c^2 + \pi)\,\pi\left(\frac{ddv}{da\,d\pi}\right)$$

$$+ b\vartheta\left(\frac{ddv}{da\,db}\right) + c\pi\left(\frac{ddv}{da\,dc}\right)$$

$$-\frac{(a^2+b^2+c^2-k^2)}{2}k\left(\frac{ddv}{dadk}\right)+a\vartheta\left(\frac{dv}{d\vartheta}\right)$$
$$+a\pi\left(\frac{dv}{d\pi}\right)+[\tfrac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)+\tfrac{1}{2}(\vartheta+\pi)]$$
$$\left(\frac{dv}{da}\right)-\frac{ak}{2}\left(\frac{dv}{dk}\right)+\tfrac{3}{2}av.$$

6) Bringt man auf gleiche Weise die Differenziale von B und C in den andern beiden Gleichungen (40, 9) auf die von v, und ordnet sie nach diesen, so findet man:

$$o=(a^2+b^2+c^2+\vartheta)\vartheta\left(\frac{ddv}{dbd\vartheta}\right)+(a^2$$
$$+b^2+c^2+\pi)\pi\left(\frac{ddv}{dbd\pi}\right)+b\vartheta\left(\frac{ddv}{db^2}\right)$$
$$+c\pi\left(\frac{ddv}{dbdc}\right)-\left(\frac{a^2+b^2+c^2-k^2}{2}\right)\left(\frac{ddv}{dbdk}\right)$$
$$+b\vartheta\left(\frac{dv}{d\vartheta}\right)+b\pi\left(\frac{dv}{d\pi}\right)$$
$$+[\tfrac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)+\vartheta+\tfrac{1}{2}\pi).\left(\frac{dv}{db}\right)-\frac{bk}{2}\left(\frac{dv}{dk}\right)$$
$$+\tfrac{3}{2}bv.$$

$$o=(a^2+b^2+c^2+\vartheta)\vartheta\left(\frac{ddv}{dcd\vartheta}\right)$$
$$+(a^2+b^2+c^2+\pi)\pi\left(\frac{ddv}{dcd\pi}\right)+b\vartheta\left(\frac{ddv}{dbdc}\right)$$
$$+c\pi\left(\frac{ddv}{dc^2}\right)-\left(\frac{a^2+b^2+c^2-k^2}{2}k\left(\frac{ddv}{dcdk}\right)\right.$$

$$+ c\vartheta \left(\frac{dv}{d\vartheta}\right) + c\pi \left(\frac{dv}{d\pi}\right) + [\tfrac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\vartheta + \pi) \left(\frac{dv}{dc}\right) - \frac{ck}{2} \left(\frac{dv}{dk}\right) + \tfrac{3}{2}\, cv.$$

§. 42.

Lehrsatz. Die Kräfte, womit zwey elliptische Sphäroiden die einerley Mittelpunct, und gleiche Eccentricitäten haben, und deren Hauptaxen zusammenfallen, einen gegebenen, außerhalb ihrem Raume befindlichen Punct nach den Richtungen der drey Hauptaxen anziehen, verhalten sich wie ihre Massen.

Beweis. 1) Wir haben oben (22) gefunden: $V = M\,(U + k^{2i}\,\frac{\vartheta^{r}}{k^{2r}} \cdot \frac{\pi^{r'}}{k^{2r'}} \cdot P + \text{u. s. f.})$; vergleicht man damit $V = Mv$, so wird $v = U + k^{2i} \cdot \frac{\vartheta^{r}}{k^{2r}} \cdot \frac{\pi^{r'}}{k^{2r'}} \cdot P + \text{u. s. f.}$

2) U ist eine Function von ϑ, π, a, b, c, die kein k enthält (ebendas.), P eine Function von a, b, c, unabhängig von k, ϑ und π. Wenn man also diesen Werth für v in die erste der drey Gleichungen (41) substituirt, so wird weder das Glied U, noch eins von denen, auf das zweyte Glied folgenden, ein Glied von der Form $k^{2i-2r-2r'} \cdot \vartheta^{r} \cdot \pi^{r'} \cdot P$ hervorbringen. Denn was

U anbetrifft, so enthält dies kein k, also $\left(\frac{ddU}{dad\vartheta}\right)$ und die übrigen partiellen Differenziale von U, welche in die Gleichung hinein kommen, ebenfalls nicht, und bey einem der folgenden Glieder, vom dritten, welches Q heißen mag, angerechnet, ist entweder i oder r oder r′ größer als beym zweyten (22).

3) Nun betrachte man nur die Beschaffenheit der Gleichung, so fällt sogleich auf, daß jedes Glied worinn ein Differenzial in Bezug auf k oder ϑ oder π vorkommt, allemal auch k, ϑ oder π als Factor im Coefficienten enthalte. Da nun $\left(\frac{dQ}{dk}\right)$ die Größe k in einer um 1 geringern Potenz, die Größen ϑ und π aber in eben der Potenz enthält als Q, so befinden sich in k $\left(\frac{dQ}{dk}\right)$ diese Größen wieder in eben der Potenz, worinn sie Q enthält, oder k $\left(\frac{dQ}{dk}\right)$ hat in Rücksicht auf k, ϑ und π mit Q einerley Form. Eben dies gilt von $\left(\frac{dQ}{d\vartheta}\right)$ und $\pi\left(\frac{dQ}{d\pi}\right)$, also haben diese, so wie k $\left(\frac{dQ}{dk}\right)$ mit $k^{2i-2r-2r'} . \vartheta^{r} . \pi^{r'} . P$ ungleiche Form, was k, ϑ und π anbetrifft, und dies bleibt noch wahr, wenn sie nochmal nach a differenziirt werden, weil dies keinen Bezug auf jene drey Größen hat.

4) Demnach kann nur das zweyte Glied selbst, wenn es in die Gleichung substituirt wird, Glieder in derselben hervorbringen, welche mit ihm (in Beziehung auf k, ϑ, π) einerley Form hat, und da nur Glieder von derselben Form sich heben können, so müssen diese besonders sich heben.

5) Man denke sich die Glieder ausgewählt, welche mit $k^{2i-2r-2r'} . \vartheta^{r} . \pi^{r'} . P$ einerley Form haben, so erhält man, wenn man erwähnten Ausdruck $= F$ setzt, $o = (a^2 + b^2 + c^2)\, \vartheta$

$$\left(\frac{ddF}{da\, d\vartheta}\right) + (a^2 + b^2 + c^2)\, \pi \left(\frac{ddF}{da\, d\pi}\right)$$

$$- \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)\, k . \left(\frac{ddF}{da\, dk}\right) + a\vartheta \left(\frac{dF}{d\vartheta}\right)$$

$$+ a\, \pi \left(\frac{dF}{d\pi}\right) + \tfrac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{dF}{da}\right)$$

$$- \frac{ak}{2} \left(\frac{dF}{dk}\right) + \tfrac{3}{2}\, aF.$$

6) Wird nun für F würklich $k^{2i-2r-2r'}\, \vartheta^{r}\, \pi^{r'} . P$ substituirt, und nach der Substitution $k^{2i-2r-2r'}\, \vartheta^{r} . \pi^{r'} = \xi$ gesetzt, so bekommt man:

$$o = (a^2 + b^2 + c^2)\, r\, \xi \left(\frac{dP}{da}\right)$$

$$+ (a^2 + b^2 + c^2)\, r'\, \xi \left(\frac{dP}{da}\right)$$

$$- \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)(2i - 2r - 2r') . \xi \left(\frac{dP}{da}\right)$$

$+ ar\xi P + ar'\xi P + \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)\xi \left(\frac{dP}{da}\right)$
$- a(i - r - r')\xi P + \frac{3}{2} a\xi P.$

7) Man ziehe die einzelnen Glieder zusammen, und dividire durch ξ, so wird $(2r + 2r' - i + \frac{3}{2})$ $(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{dP}{da}\right) + (2r + 2r' - i + \frac{3}{2})\,.$ $aP = o$, oder $(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{dP}{da}\right) + aP = o$; eine Differenzialgleichung, die sich, wenn P als bloße Function von a jetzt angesehen wird, unter die Form $\frac{dP}{P} = \frac{-ada}{a^2 + b^2 + c^2}$ bringen läßt, wovon nun das Integral: $\log P = \log H - \frac{1}{2} \log (a^2 + b^2 + c^2)$, oder $P = \frac{H}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}}$ ist, wo H nur noch b und c enthalten kann.

8) Durch gleiche Schlüsse bekommt man aus den andern beyden Gleichungen (40, 9) $o = (a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{dP}{db}\right) + bP$, und $o = (a^2 + b^2 + c^2)$ $\left(\frac{dP}{dc}\right) + cP$. Substituirt man in diese den vorhin gefundenen Werth für P, so erhält man:
$(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{dH}{db}\right) - \frac{bH}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}}$ $+ bP = o$, also, weil das zweyte Glied $= - bP$

ist, $\left(\frac{dH}{db}\right) = 0$, und eben so giebt auch die dritte $\left(\frac{dH}{dc}\right) = 0$. Daraus folgt nun, daß H auch weder b noch c enthalten könne; es muß also diese Größe eine abstracte Zahl seyn. Ist sie dies, so ist P von der Dimension — 1 (7); nun aber haben wir (23) gesehen, daß P wenigstens die Dimension — 3 haben müsse, und dieser Widerspruch kann nicht anders gehoben werden, als wenn $H = 0$, folglich auch $P = 0$ ist.

9) Da jetzt gezeigt ist, daß P nothwendig 0 seyn müsse, so tritt das dritte Glied von v an die Stelle des zweyten, und weil alles von diesem gilt, was bey P statt fand, so erhellet auf eben die Weise, daß auch dieses = 0 seyn müsse, welche Behauptung sich also nun mit eben dem Rechte auf alle folgenden Glieder ausdehnt. Demnach enthält v bloß das erste Glied U, welches kein k enthält, und es ist also $V = MU$, so daß sich V bey einerley a, b, c, ϑ und π, wie M verhält, indem in diesem Falle U einen unveränderlichen Werth hat.

10) Es ist also $A = -\left(\frac{dV}{da}\right) = -M\left(\frac{dU}{da}\right)$; $B = -M\left(\frac{dU}{db}\right)$; $C = -M\left(\frac{dU}{dc}\right)$; wo $\left(\frac{dU}{da}\right)$, $\left(\frac{dU}{db}\right)$, $\left(\frac{dU}{dc}\right)$ ebenfalls bloß von a, b, c,

ϑ und π abhängen, oder kein k enthalten, weil U keins enthält; folglich verhält sich A, B und C bey einerley a, b, c, ϑ und π, d. i. bey gegebener Lage des angezogenen Punctes, und gleichen Eccentricitäten der anziehenden Sphäroiden, wie M, die Massen derselben.

11) Dieses merkwürdige Theorem hat zuerst Hr. de la Place in seiner Allgemeinheit auf die hier vorgetragene Art bewiesen.

§. 43.

Aufgabe. Die Attraction eines gegebenen Sphäroids gegen einen außerhalb seiner Oberfläche liegenden Punct zu finden, dessen Lage gegen den Mittelpunct desselben durch die drey Coordinaten a, b und c gegeben ist.

Auflösung. 1) Es läßt sich ein Sphäroid gedenken, welches mit dem gegebenen einerley Mittelpunct, Lage und einerley Eccentricitäten hat, und dabey den gegebenen Punct in seiner Oberfläche enthält; die Werthe der Anziehungskräfte A, B, C für dies Sphäroid, verhalten sich zu denen, für das gegebene, wie seine Masse zu des letztern seiner.

2) Es sey k die eine Axe des gegebenen Sphäroids, $\sqrt{}\vartheta$ und $\sqrt{}\pi$ seine Eccentricitäten, k′ die Axe des angenommenen, die mit k zusammenfällt, m′ und n′ das was beym erstern m und n heißt,

so ist $k'^2\left(\frac{1-m'}{m'}\right)=\vartheta$, $k'^2\left(\frac{1-n'}{n'}\right)=\pi$, und da der angezogene Punct in der Oberfläche des letztern seyn soll, so ist $a^2+m'b^2+n'c^2=k'^2$.

3) Die beyden erstern Gleichungen geben: $m'=\frac{k'^2}{k'^2+\vartheta}$, $n'=\frac{k'^2}{k'^2+\pi}$, dies in die dritte Gleichung gebracht, giebt folgende:

$$k'^6-(a^2+b^2+c^2-\vartheta-\pi)k'^4-[(a^2+c^2)\vartheta+(a^2+b^2)\pi-\vartheta\pi]\,k'^2-a^2\vartheta\pi=0.$$

4) Daß diese Gleichung allemal einen reellen positiven Werth habe, erhellet auf folgende Weise: Man nehme für k die kleinste Axe des Sphäroids an, so sind ϑ und π positiv, weil m und n alsdann beyde <1 sind, also ist in diesem Falle das letzte Glied $-a^2\vartheta\pi$ negativ, folglich hat die Gleichung bekanntermaaßen allemal eine reelle positive Wurzel k'^2, weshalb es auch immer ein reelles positives k' giebt, und also auch ein mögliches Sphäroid der Art wie (1) verlangt wird.

5) Bedeutet also L den Werth des Integrals

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{\left(1+\frac{\vartheta x^2}{k'^2}\right)}\sqrt{\left(1+\frac{\pi x^2}{k'^2}\right)}}$$

von $x=0$ bis $x=1$ genommen, so ist, wenn wir $\frac{\vartheta}{k'^2}=\varepsilon^2$ und $\frac{\pi}{k'^2}=\varepsilon'^2$ setzen, L eben die

Function von ε und ε', wie F von μ und μ' (36). Wenn wir daher M′ die Masse des Sphäroids nennen, das den gegebenen Punct in seiner Oberfläche enthält, und A′, B′, C′ seine Anziehungskräfte gegen diesen Punct nach den Richtungen der drey Hauptaxen, so wird, weil dieser Fall allerdings noch zur Theorie der Attraction der innern Puncte gerechnet werden darf:

$$A' = \frac{3aM'}{k'^3} \cdot L, \quad B' = \frac{3bM'}{k'^3}\left(\frac{d\varepsilon L}{d\varepsilon}\right),$$

$$C' = \frac{3cM'}{k'^3}\left(\frac{d\varepsilon' L}{d\varepsilon'}\right)$$ und da $A' : A = M' : M$, $B' : B = M' : M = C' : C$ ist, so haben wir endlich:

$$A = \frac{3aM}{k'^3} \cdot L, \quad B = \frac{3bM}{k'^3}\left(\frac{d\varepsilon L}{d\varepsilon}\right),$$

$$C = \frac{3cM}{k'^3}\left(\frac{d\varepsilon' L}{d\varepsilon'}\right),$$ wo vorausgesetzt wird, daß man k′ aus obiger Gleichung bestimmt habe.

§. 44.

1) Sind bey dem gegebenen Sphäroid die Brüche $\frac{\vartheta}{k^2}$ und $\frac{\pi}{k^2}$ so klein, daß das Product $\frac{\vartheta\pi}{k^4}$ gegen jene weggelassen werden kann, so wird die Gleichung, welche k′ bestimmt, wenn noch der Kürze wegen $a^2 + b^2 + c^2 = f^2$ gesetzt wird, folgende:

$$k'^4 - [f^2 - (\vartheta + \pi)]\, k'^2 - (a^2 + c^2)\vartheta - (a^2 + b^2)\pi = 0,$$ aus welcher man

$k'^2 = f^2 - \frac{b^2\vartheta + c^2\pi}{f^2}$ erhält. Nun ist

$$L = \tfrac{1}{3} - \frac{\vartheta}{10k'^2} - \frac{\pi}{10k'^2} \text{ also} = \tfrac{1}{3} - \frac{\vartheta + \pi}{f^2}$$
$$\left(1 + \frac{b^2\vartheta + c^2\pi}{f^4}\right).$$

Ferner ist $(k')^{-3} = \frac{1}{f^3}\left(1 + \tfrac{3}{2}\,\frac{(b^2\vartheta + c^2\pi)}{f^4}\right)$, folglich:

$$A = \frac{3aM}{k'^3}\,L = \frac{aM}{f^3}\left(1 - \tfrac{3}{10}\left(\frac{\vartheta + \pi}{f^2}\right)\right.$$
$$\left.+ \tfrac{3}{2}\left(\frac{b^2\vartheta + c^2\pi}{f^4}\right)\right),$$ und auf gleiche Weise wird

$$B = \frac{3bM}{k'^3}\left(\frac{d\varepsilon L}{d\varepsilon}\right) = \frac{bM}{f^3}\left(1 - \tfrac{3}{10}\left(\frac{3\vartheta + \pi}{f^2}\right)\right.$$
$$\left.+ \tfrac{3}{2}\left(\frac{b^2\vartheta + c^2\pi}{f^4}\right)\right)$$ und $C = \frac{cM}{f^3}$

$$\left(1 - \tfrac{3}{10}\left(\frac{\vartheta + 3\pi}{f^2}\right) + \tfrac{3}{2}\left(\frac{b^2\vartheta + c^2\pi}{f^4}\right)\right).$$

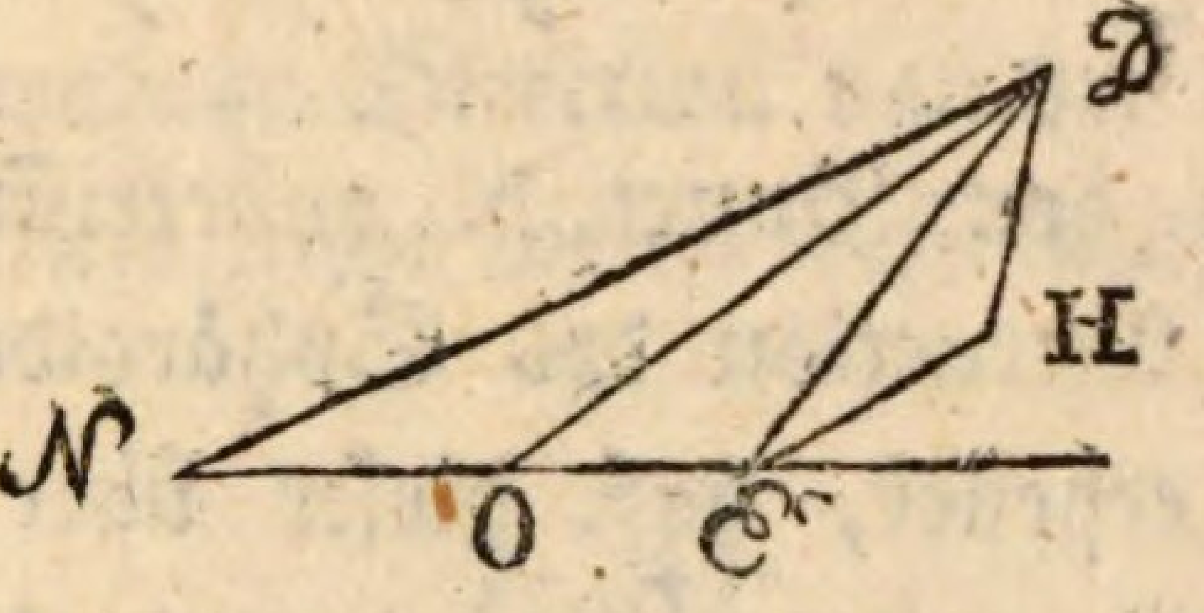
2) Für den Fall, wo $\vartheta = \pi$ ist, hat man

$$A = \frac{aM}{f^3}\left(1 - \tfrac{3}{5}\,.\,\frac{\vartheta}{f^2} + \tfrac{3}{2}\,\frac{(f^2 - a^2)\vartheta}{f^4}\right)$$
$$= \frac{aM}{f^3}\left(1 + \frac{(gf^2 - 15a^2)\vartheta}{10f^4}\right),\ B = \frac{bM}{f^3}$$
$$\left(1 - \tfrac{6}{5}\,.\,\frac{\vartheta}{f^2} + \frac{3\vartheta(f^2 - a^2)}{2f^4}\right) = \frac{bM}{f^3}$$
$$\left(1 - \frac{(15a^2 - 3f^2)\vartheta}{10f^4}\right)$$ und $C = \frac{cB}{b}$.

3) Es sey das Verhältniß der beyden Axen $1 : 1 + i$, so wird $m = 1 - 2i$ und $\vartheta = 2ik^2$,

also $A = \frac{aM}{f^3}\left(1 + \frac{(9f^2 - 15a^2)ik^2}{5f^4}\right)$,

$B = \frac{bM}{f^3}\left(1 - \frac{(15a^2 - 3f^2)}{5f^4}ik^2\right)$.



Aus den beyden Kräften B und C, weil sie sich wie die Coordinaten EH und HD verhalten, nach denen sie würken, entspringt eine Kraft nach DE, welche $= \frac{(b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} . M}{f^3}\left(1 + \frac{(3f^2 - 15a^2)ik^2}{5f^4}\right)$ ist. Man setze mit dieser die Kraft $A = \frac{aM}{f^3}$

$$\left(1 + \frac{(3f^2 - 15a^2)}{5f^4}ik^2\right) + \frac{6aMik^2}{5f^5}$$

zusammen, welche beyde aufeinander senkrechte Richtungen haben, so entspringt daraus eine mittlere Kraft, deren Richtung in die Axe AO irgendwo in N eintreffen muß, weil die Seitenkräfte in der Ebene OED liegen. Um sie bequemer finden zu können, setze man erstere $= (b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}\,\Omega$, letztere $= a\Omega + \omega$, wo ω von der Ordnung i ist, so wird die mittlere Kraft $= \sqrt{[(a^2 + b^2 + c^2)\Omega^2 + 2a\Omega\omega]}$

$$= f\,\Omega\sqrt{\left(1+\frac{2a\omega}{f^2\Omega}\right)} = f\Omega + \frac{a\omega}{f},$$ also,

wenn man die Werthe Ω und ω wieder herstellt,

$$= \frac{M}{f^2}\left(1+\frac{(3f^2-15a^2)ik^2}{5f^4}\right)+\frac{6a^2Mik^2}{5f^6}$$

$$= \frac{M}{f^2}\left[1+\left(\frac{3f^2-9a^2}{5f^4}\right)ik^2\right].$$

4) Was den Punct N anbetrifft, worinn die Richtung der Attraction des Sphäroids die Axe AO schneidet, so erhellet, daß dieser über O hinausfallen müsse, weil nicht völlig A und die Kraft nach DE den Seiten OE und DE proportional sind, sondern A nach Verhältniß etwas größer ist. Zugleich ist aber sichtbar, daß NO sehr klein sey, und braucht man wieder die Buchstaben Ω und ω, so hat man $\frac{EN}{DE} = \frac{a+ON}{\sqrt{(b^2+c^2)}} = \frac{a\Omega+\omega}{\Omega\sqrt{(b^2+c^2)}}$

$$= \frac{a}{\sqrt{b(^2+c^2)}} + \frac{\omega}{\Omega\sqrt{(b^2+c^2)}},$$ also wird

$ON = \frac{\omega}{\Omega}$, und da Ω sehr nahe $= \frac{M}{f^3}$, und ω $= \frac{6aMik^2}{5f^5}$ ist, so erhält man endlich: $ON = \frac{6aik^2}{5f^2}$.

5) Paul Frisius giebt in seiner Cosmographie *) für die Anziehung eines Sphäroids gegen einen äu-

---

* P. Frisii Opera Pars III.

ßern Punct die Formel $\frac{M}{f^2} + \frac{4\pi BC^2(1 - 3\,Cos\,DOE^2)}{5f^4}$ wo C und B bey ihm das bedeuten was hier k und ik genannt ist. Man darf nur außerdem $\frac{a}{f}$ für Cos DOE substituiren, so kommt eben die Formel (3) heraus, übrigens findet man a. a. O. die Abweichung der wahren Direction von der Linie DO nach dem Mittelpuncte nicht weiter bestimmt.

§. 45.

Beym eben betrachteten Rotations-Sphäroid läßt sich die Attraction gegen einen auswärtigen Punct, auch ohne Hülfe der Reihen, durch exacte Formeln darstellen. Setzt man nemlich (43, 2) $\vartheta = \pi$, so wird $o = a^2 + \frac{k'^2(f^2 - a^2)}{k'^2 + \vartheta} - k'^2$, oder $o = a^2\vartheta + k'^2(f^2 - \vartheta) - k'^4$, welches k'^2

$$= \frac{f^2 - \vartheta + \sqrt{[(f^2 - \vartheta)^2 + 4a^2\vartheta]}}{2}$$

giebt. Da auf solche Weise k′ als bekannt angesehen werden kann, so hat man nunmehr:

$$A = \frac{3aM}{k'^3\varepsilon^3}(\varepsilon - \text{arc tang}\,\varepsilon),\ B = \frac{3bM}{2k'^3\varepsilon^3}\left(\text{arc tang}\,\varepsilon - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon 2}\right),\ C = \frac{3cM}{2k'^3\varepsilon^3}\left(\text{arc tang}\,\varepsilon - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}\right).$$

Theorie des Gleichgewichtes der Theile eines flüssigen Körpers unter sich, die sich gegenseitig anziehen, und von fremden Kräften sollicitirt werden.

§. 46.

Wenn man einen flüssigen Körper, dessen Theile in Ruhe sind, als ein zusammenhängendes Ganzes ansieht, so kann man sich ihn in Elemente von willkührlicher Form getheilt denken. Man nehme daher in demselben drey senkrechte durch seinen Schwerpunct O gehende Axen OA, OB, OC an, und ziehe diesen für einen Punct M in demselben die Coordinaten $MQ = z$, $QP = y$, und $PO = x$ parallel, so wird das durch die Aenderungen derselben bey M entstehende Element ein rechtwinklichtes Parallellepipedum mit den Seitenlinien dx, dy und dz, dessen Volumen also $= dx\,dy\,dz$, und dessen Masse $= dM = \varrho\,dx\,dy\,dz$ ist, wenn wir die Dichte dieses Elements ϱ nennen.

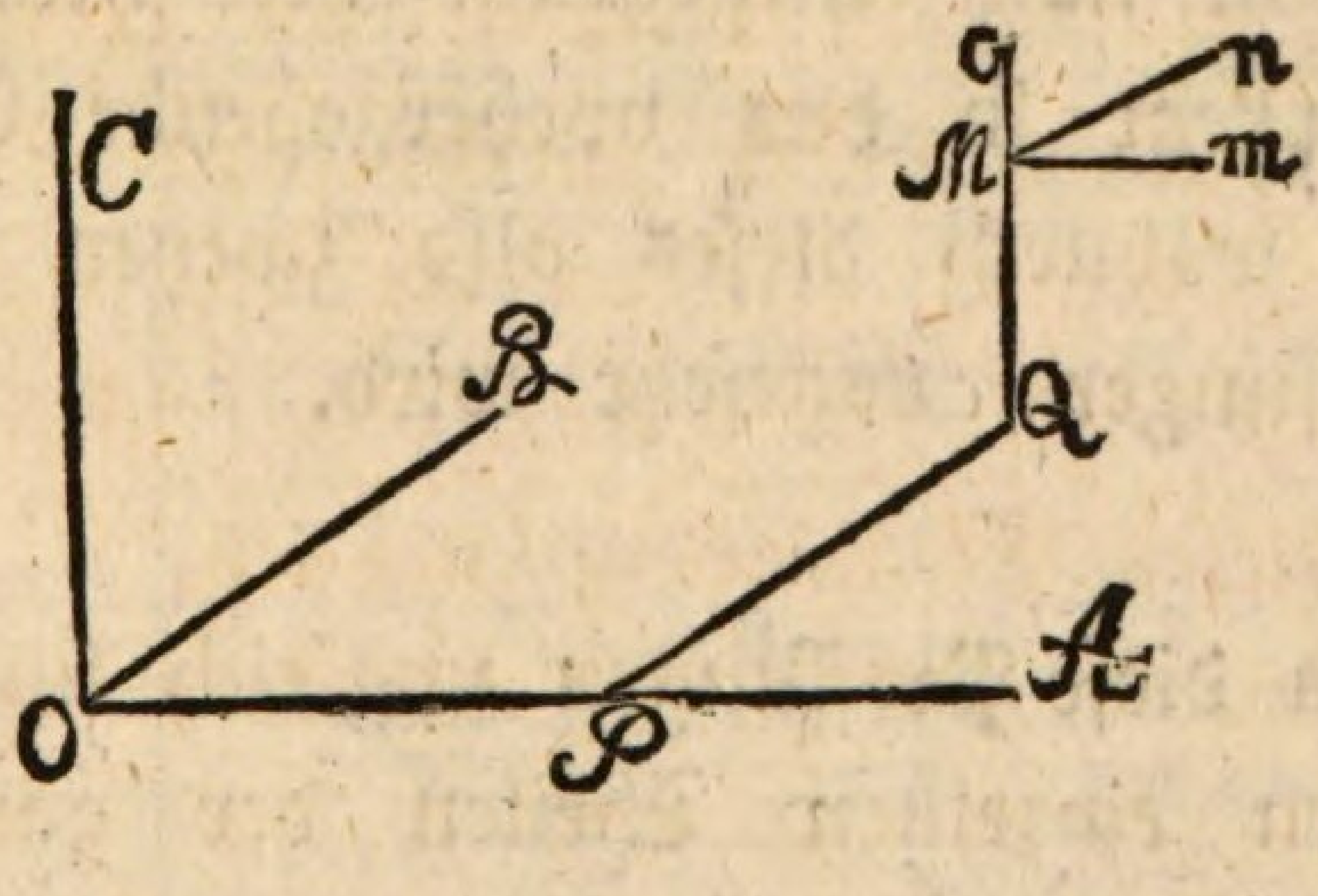
§. 47.

Ein solches Element ist vermöge der Flüssigkeit des Körpers einem Drucke auf jede seiner Seitenflächen ausgesetzt, die Theile mögen unter einander im Gleichgewichte seyn oder nicht, und diesen übt es gegenseitig auf das nächste Element aus, welches mit ihm diese Seitenfläche gemein hat. Wir wollen

diesen

diesen Druck als das Gewicht eines Prismas von der Dichte = 1 ansehen, welches auf der Seitenfläche steht, worauf derselbe geschieht, die Höhe p hat, und von der Schwere 1 getrieben wird, so ist p eine Größe, die für jedes bestimmte x, y und z einen bestimmten Werth hat. Das Element leidet also auf die Seitenfläche dx dy den Druck p dx dy, auf die Fläche dy dz, p dy dz, und so auf dx dz, p dx dz, und da er nicht für alle Elemente verhältnißmäßig gleich stark ist (man nehme nur in einem Gefäße stehendes Wasser), so erhellet, daß p eine veränderliche Größe sey, welche durch x, y, z bestimmt wird, und also als Function die Variabeln betrachtet werden müsse.

§. 48.



Aufgabe. Wenn die Elemente eines flüssigen Körpers untereinander im Gleichgewichte sind, und durch drey beschleunigende Kräfte P, Q, R nach den Richtungen OA, OB und OC sollicitirt werden, deren Größen von den Coordinaten abhängen, eine Gleichung zwischen dem Drucke, den jedes Ele-

ment von allen Seiten leidet, und diesen Kräften zu finden.

Auflösung. 1) Indem man von der vordern Seitenfläche Mon des Elementes bey M zu seiner gegenüber liegenden, oder zu der Vorderfläche des zunächst in der Richtung OA liegenden Elementes übergeht, ändert sich x in $x + dx$, wobey y und z unverändert bleiben, folglich wird aus p durch diese Aenderung $p + \left(\frac{dp}{dx}\right) dx$, und der Druck, welcher auf die erstere Fläche $= p\,dy\,dz$ war, wird auf die folgende $p\,dy\,dz + \left(\frac{dp}{dx}\right) dx\,dy\,dz$. Diesen Druck, den das folgende Element auf seine Vorderfläche bey m leidet, übt es gegenseitig auf dieselbe Fläche nach entgegengesetzter Richtung mM aus, und preßt so das vorhergehende Element zurückwärts, wodurch dieses also zweyen entgegengesetzten Pressungen ausgesetzt wird.

2) Da diese Pressungen ungleich sind, und doch zwischen den einzelnen Theilen der ganzen Masse Gleichgewicht statt finden soll, so muß die beschleunigende Kraft P, welche das Element bey M nach der Richtung Mm sollicitirt, diesen Ueberschuß heben. Durch sie wird aber dem Elemente die bewegende Kraft $P\,dM = P\,\varrho\,dx\,dy\,dz$ mitgetheilt, folglich hat man folgende Gleichung:

$$P\varrho\, dx\, dy\, dz = \left(\frac{dp}{dx}\right) dx\ dy\ dz \text{ oder } \varrho\ P dx = \left(\frac{dp}{dx}\right) dx.$$

3) Eben so ist der Unterschied zwischen dem Drucke, den das Element auf die Seitenfläche Mom, und dem, welchen es auf die gegenüber liegende nach entgegengesetzter Richtung leidet, $= \left(\frac{dp}{dy}\right) dy.dx\,dz$, welcher wieder von der bewegenden Kraft $\varrho\, Q\, dx\, dy\, dz$, die die beschleunigende Kraft Q in dem ganzen Elemente nach der Richtung Mn hervorbringt, aufgehoben werden muß, welches $\left(\frac{dp}{dy}\right) dy = \varrho\, Q\, dy$ giebt, und auf gleiche Weise erhält man auch in Bezug auf die Richtung Mo, $\left(\frac{dp}{dz}\right) dz = \varrho\, R dz$.

4) Durch Verbindung dieser drey Gleichungen erhält man nun: $\left(\frac{dp}{dx}\right) dx + \left(\frac{dp}{dy}\right) dy + \left(\frac{dp}{dz}\right) dz = \varrho\,(P dx + Q dy + R dz)$, oder da das, was linker Hand steht, das vollständige Differenzial von p, d. h. sein Differenzial in Bezug auf alle Variabeln ist, von denen es abhängt, so wird auch $dp = \varrho\,(P dx + Q dy + R dz)$.

5) Wenn die Dichte ϱ im Körper veränderlich ist, und p auch nach dieser abhängt, so könnte es

scheinen, als sey p eine Function von vier veränderlichen Größen x, y, z und ϱ. Aber man darf nur überlegen, daß die Dichte ϱ nothwendig einem Gesetze folgen, und also auch von x, y und z abhängen müsse; weshalb auch in diesem Falle die Zahl der Variabeln auf drey zurückgeführt wird.

§. 49.

Aus dem Vorhingefundenen folgt, daß ϱ (Pdx + Qdy + Rdz) ein vollständiges Differenzial seyn müsse, weil die Größe p das Integral davon ist. Nun ist bekanntlich $\left(\frac{d\left(\frac{dp}{dx}\right)}{dy}\right) = \left(\frac{d\left(\frac{dp}{dy}\right)}{dx}\right)$

u. s. f., substituirt man also für $\left(\frac{dp}{dx}\right)$, $\left(\frac{dp}{dy}\right)$, $\left(\frac{dp}{dz}\right)$ ihre (48) gefundenen Werthe ϱP, ϱQ, ϱR,

so erhält man folgende Gleichungen: $\left(\frac{d\varrho P}{dy}\right) - \left(\frac{d\varrho Q}{dx}\right) = o$, $\left(\frac{d\varrho P}{dz}\right) - \left(\frac{d\varrho R}{dx}\right) = o$, $\left(\frac{d\varrho R}{dy}\right) = \left(\frac{d\varrho Q}{dz}\right) = o$.

So lange das Gesetz der Dichte unbekannt ist, können wir diese Gleichungen nicht gebrauchen, wofern wir nicht ϱ zu eliminiren suchen. Zu dem Ende multiplicire man die erste Gleichung durch R, die zweyte durch — Q, und die dritte durch P, so bekommt man

$$\left(\frac{\varrho R dP + PR d\varrho}{dy}\right) - \left(\frac{\varrho R dQ + RQ d\varrho}{dx}\right) = o,$$

$$-\left(\frac{\varrho Q dP + PQ d\varrho}{dz}\right) + \left(\frac{\varrho Q dR + QR d\varrho}{dx}\right) = o,$$

$$\left(\frac{\varrho P dQ + PQ d\varrho}{dz}\right) - \left(\frac{\varrho P dR + PR d\varrho}{dy}\right) = o,$$

diese addirt geben $\varrho\left(\frac{Q dR - R dQ}{dx}\right)$

$$+ \varrho\left(\frac{R dP - P dR}{dy}\right) + \varrho\left(\frac{P dQ - Q dP}{dz}\right) = o,$$

und mit ϱ dividirt:

$$Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - R\left(\frac{dQ}{dx}\right) + R\left(\frac{dP}{dy}\right) - P\left(\frac{dR}{dy}\right)$$

$$+ Q\left(\frac{dR}{dx}\right) - Q\left(\frac{dP}{dz}\right) = o$$

eine Gleichung fürs Gleichgewicht, die bey jedem Gesetze der Dichte im Körper, statt finden muß.

§. 50.

Lehrsatz. Wenn der flüssige Körper, dessen Theile homogen und im Gleichgewichte sind, von keinen fremden Grenzen eingeschlossen ist, so muß für die Elemente an der Oberfläche $Pdx + Qdy + Rdz = o$ seyn.

Beweis. 1) Der Voraussetzung gemäß leiden die äußern Seitenflächen der Elemente an der Oberfläche keinen Druck, also ist für diese allent-

halben $p = 0$. Nun hat der Körper, da er im Gleichgewichte ist, eine bestimmte Form, also giebt es für die Oberfläche zwischen x, y und z eine Gleichung, oder z muß daselbst eine bestimmte Function von x und y seyn, wodurch p an der Oberfläche bloß von x nnd y abhängig wird.

2) Diese nun ist von der Art, daß sie für jedes x und $y = 0$ ist, folglich ist auch ihr Differenzial $= 0$: denn man setze, p wäre an der Oberfläche allenthalben $= a$, so würde $dp = 0$, welches also auch statt finden muß, wenn $a = 0$ ist.

3) Wir hatten für p im Körper überhaupt $dp = \varrho(Pdx + Qdy + Rdz)$, also ist an der Oberfläche $Pdx + Qdy + Rdz = 0$.

§. 51.

Aufgabe. Bey eben den Voraussetzungen die Beschaffenheit der Kräfte P, Q, R zu finden, die erforderlich ist, damit der Körper bey der Figur eines elliptischen Sphäroids im Gleichgewichte seyn könne.

Auflösung. 1) Für die Oberfläche des Sphäroids ist $x^2 + my^2 + nz^2 = k^2$, wovon die Differenzialgleichung: $xdx + mydy + nzdz = 0$ ist, und diese giebt $dz = \frac{-x}{nz} \cdot dx - \frac{my}{nz} \cdot dy$, folglich wird $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{-x}{nz}$, $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{-my}{nz}$.

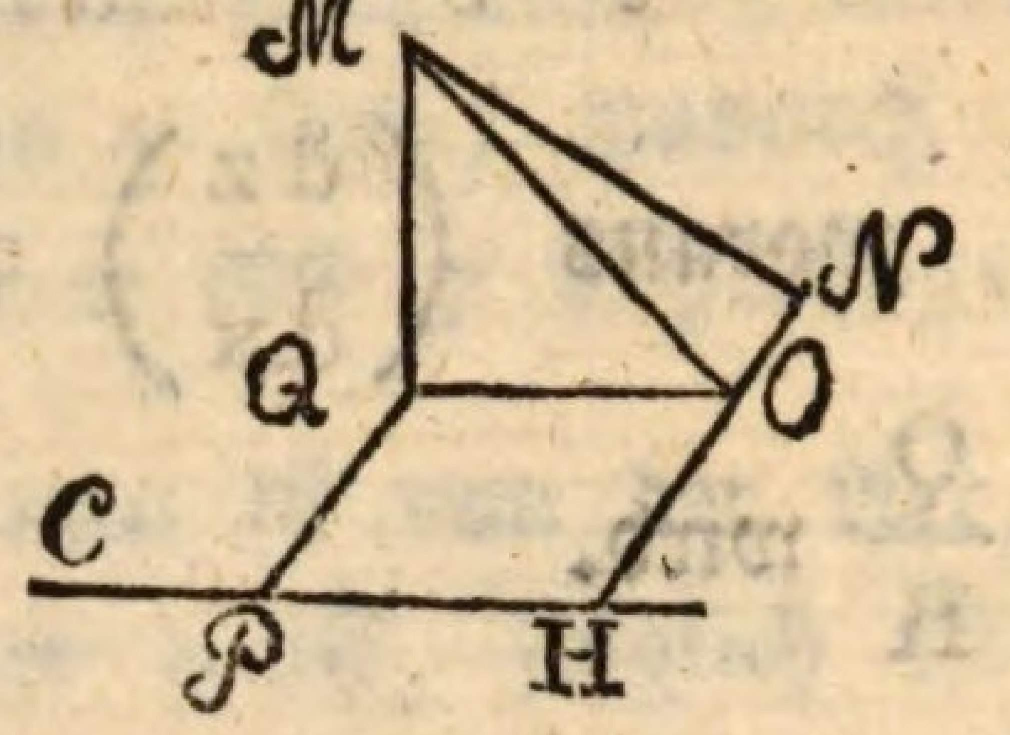
2) Die Bedingung des Gleichgewichtes erfordert, daß an der Oberfläche $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ sey (50). Diese Gleichung aber giebt $dz = -\frac{P}{R}dx - \frac{Q}{R}dy$, woraus $\left(\frac{dz}{dx}\right) = -\frac{P}{R}$, und $\left(\frac{dz}{dy}\right) = -\frac{Q}{R}$ wird.

3) Man erhält also, wenn man die Werthe von $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ aus 2 mit denen aus 1 vergleicht:
$\frac{P}{R} = \frac{x}{nz}$, $\frac{Q}{R} = \frac{my}{nz}$, also ist $P : Q : R = x : my : nz$. Dies Verhältniß muß also zwischen den auf ein Element an der Oberfläche würkenden Kräften P, Q und R statt finden, wenn der Körper bey der Form eines elliptischen Sphäroiden im Gleichgewichte seyn soll.

§. 52.

Lehrsatz. Wenn die Theile eines flüssigen Körpers, der in keine fremde Grenzen eingeschlossen ist, unter einander im Gleichgewichte sind, so ist die mittlere Kraft, welche aus der Zusammensetzung der drey Kräfte P, Q und R entspringt, allenthal-

ben an der Oberfläche senkrecht auf derselben.



Beweis. 1) Es sey M ein Punct in der Oberfläche, und ψ die mittlere Kraft, welche auf diesen Punct überhaupt würkt, MN die Richtung derselben: so muß ψ, nach den mit den Axen des Körpers parallelen Richtungen QO, NO und MQ zerlegt, die Kräfte P, Q und R geben.

2) NH ist in der untern Ebene der Coordinaten CP und PQ, auf der Axe CH senkrecht, und QO mit CH parallel, also auf PQ senkrecht, folglich, da PQ sowol mit QM als auch mit QO einen rechten Winkel macht, so steht diese Linie senkrecht auf der Ebene MQO, also auch HO, da sie mit PO parallel läuft, folglich macht AO mit jeder in der Ebene MQO gezogenen Linie einen rechten Winkel. Zieht man also MO, so sind MO und NO senkrecht aufeinander, und die Kraft ψ zerfällt in eine nach $ON = \frac{NO \,.\, \psi}{MN}$, und in eine nach $MQ = \frac{MQ \,.\, \psi}{MN}$, und letztere wieder in eine nach

$MQ = \frac{MQ \cdot \psi}{MN}$, und in eine nach $QO = \frac{QO \cdot \psi}{MN}$.

3) Demnach ist $P = \frac{QO \cdot \psi}{MN}$, $Q = \frac{NO \cdot \psi}{MN}$, und $R = -\frac{MQ \cdot \psi}{MN}$, also vermöge des Gleichgewichtes $\frac{\psi}{MN}(QO\,dx + NO\,dy - MQ\,dz) = o$, folglich $dz = \frac{QO}{MQ}dx + \frac{NO}{MQ} \cdot dy$, mithin haben wir $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \frac{QO}{MQ}$ $\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{NO}{MQ}$, oder, da $MQ = z$ ist, $QO = z\left(\frac{dz}{dx}\right)$, und $NO = z\left(\frac{dz}{dy}\right)$, folglich die Richtung MN auf der Oberfläche normal (7).

Betrachtung des Gleichgewichts beym Drehen des Körpers.

§. 53.

Wir wollen setzen, das Fluidum, welches unter den vorigen Bedingungen im Gleichgewichte war, bekomme plötzlich eine fortgehende Bewegung, so bewegt sich jedes Element mit der erhaltenen Geschwindigkeit, dabey alle mit gleicher und nach parallelen Richtungen. Dadurch entsteht also keine neue Wir-

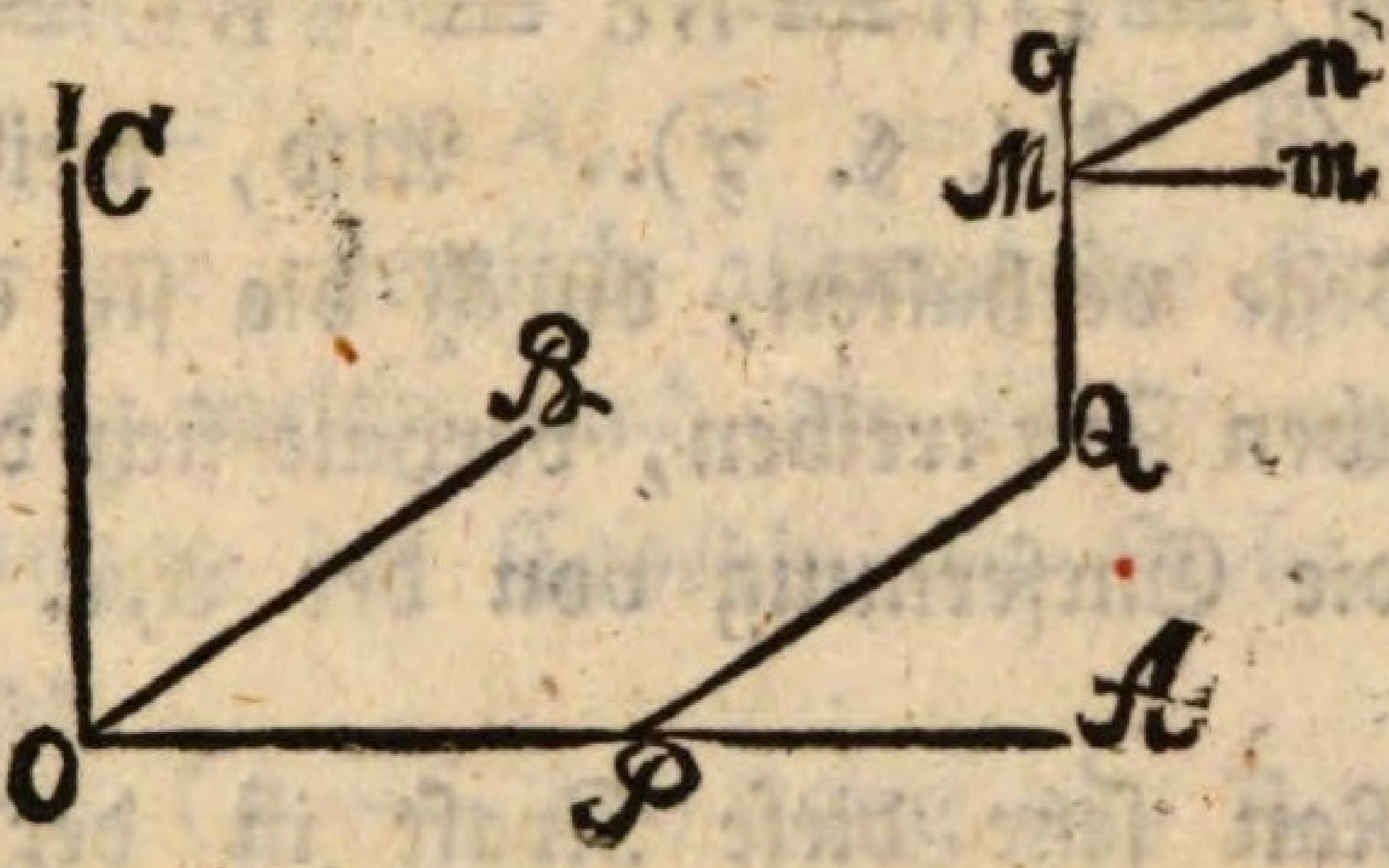
kung des einen Elementes auf das andere, und der Druck, den sie unter einander ausüben, ist noch derselbe als vorhin, da die ganze Masse in Ruhe war, vorausgesetzt, daß die Kräfte P, Q, R dieselben bleiben. Das Gleichgewicht wird also durch diese gemeinschaftliche Bewegung aller Elemente nicht gestört, und man kann den flüssigen Körper, der fortgehende Bewegung hat, in dieser Rücksicht so ansehen, als ruhe er.

§. 54.

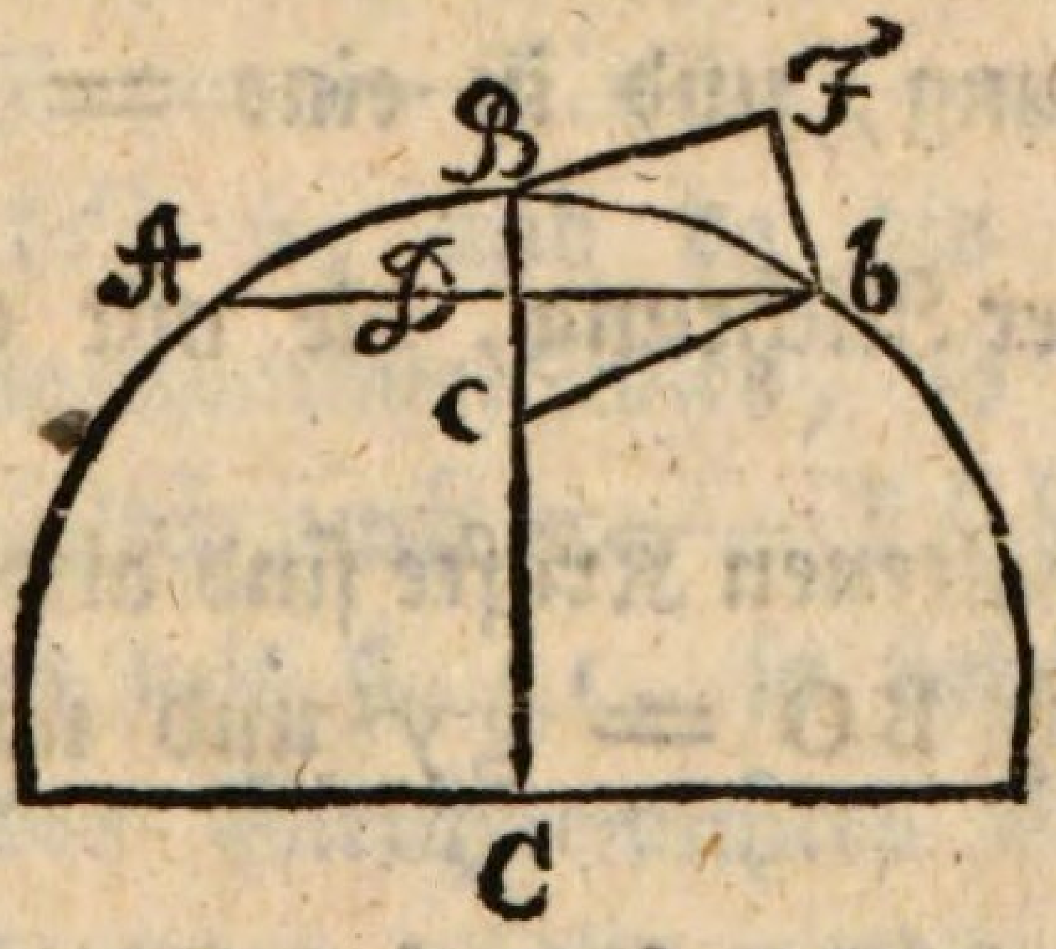
Aber anders verhält sich die Sache, wenn das Fluidum aus der Ruhe in eine drehende Bewegung gesetzt wird. Durch ein solches Drehen der ganzen Masse bekommt nemlich jedes Element ein Bestreben, sich von der Rotations-Axe zu entfernen, eine Schwungkraft, die nicht für alle Theile dieselbe ist, und nach verschiedenen Directionen würkt. Sie muß also das Gleichgewicht im Körper aufheben, und dieser jeden Augenblick seine Form ändern. Dies wird nun so lange dauern bis derselbe eine Form bekommen hat, für welche seine Elemente auch bey dieser hinzugekommenen Schwungkraft einander das Gleichgewicht halten können. Alsdann ist dies Gleichgewicht wieder fortdauernd, weil die Elemente bey dieser Bewegung gleiche Winkelgeschwindigkeit um die Rotationsaxe haben, und folglich das eine frey dem andern folgt, ohne auf dasselbe anders zu würken, als wenn sie alle in Ruhe wären. Man kann sich also den Körper in diesem Zustande eben so

vorstellen, als sey er in Ruhe, und jedes Theilchen werde außer den Kräften P, Q und R noch durch die Schwungkraft sollicitirt, die es durch die Umdrehung bekommen hat.

§. 55.



Aufgabe. Wenn ein Körper sich um eine seiner Hauptaxen OA drehet, *) und die Winkelgeschwindigkeit der Umdrehung gegeben ist, die Kräfte zu finden, welche für ein Element aus dessen Schwungkraft nach den den dreyen Axen OA, OB und OC parallelen Richtungen entspringen.



Auflösung. 1) Der Körper drehe sich in der Zeit t um den Winkel φ gleichförmig, so ist

*) Dies wird hier angenommen, damit der ganze Körper in Ruhe bleiben könne.

seine Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\phi}{dt}$, und der Weg den ein Element, dessen Entfernung von der Rotationsaxe r ist, in dt macht $= rd\phi = AB$, folglich der Weg, durch den es von der Schwungkraft getrieben wird, $= Db = Bc = 2BE = (rd\phi)^2 : r = rd\phi^2$ (1. Thl. §. 3). Also, weil Kräfte sich wie die Wege verhalten, durch die sie einerley Körper in derselben Zeit treiben, verhält sich die Schwungkraft wie die Entfernung von der Axe.

2) Man setze diese Kraft in der Entfernung $1 = g$, so ist sie für das Element bey $M = g \cdot PM$ nach der Richtung PM; nemlich nach dem Radius des durch M gehenden, auf der Rotationsaxe OA senkrechten Kreises. Diese Kraft zerfällt in eine $= (g \cdot PM) \frac{PQ}{PM} = gy$ nach der mit OB parallelen Richtung, und in eine $= g \cdot PM \cdot \frac{MQ}{MP} = gz$ nach einer Richtung, die mit OC parallel ist.

3) Die erhaltenen Kräfte sind also folgende: nach $AO = 0$, nach $BO = gy$ und nach $CO = gz$.

§. 56.

Wir wollen jetzt einen flüssigen Körper annehmen, dessen Elemente durch keine Kraft weiter sollicitirt werden als durch die Attraction der ganzen Masse gegen dieselben. Dieser Körper drehe sich um

irgend eine Axe, so ist wol voraus zu sehen, daß er die Form eines Rotations-Sphäroids annehmen werde, dessen Polar-Axe diejenige seyn wird, um welche das Drehen geschieht. Untersuchen wir genauer, ob mit dieser Hypothese das Gleichgewicht der Theile untereinander bestehen könne. Die Kraft P wird hier $= - A$, $Q = - B + gy$, $R = - C + gz$, nemlich allemal die Kraft als positiv angesehen, welche nach der Richtung der positiven Aenderungen der Coordinaten strebt. Nun ist

$$A = \frac{3xM}{k^3\mu^3}(\mu - \text{arc tang}\,\mu),\ B = \frac{3yM}{2k^3\mu^3}\left(\text{arc tang}\,\mu - \frac{\mu}{1+\mu^2}\right)\ C = \frac{zB}{y}\ (36),$$

wo M und k gegeben sind, und auch μ unveränderlich, wegen des stabilen Gleichgewichts (54) ist: setzt man also zur Abkürzung $A = Lx$, $B = L'y$, so ist $C = L'z$ und L, L' sind beständige Größen. Daraus wird $P = - Lx$, $Q = (g - L')\,y$, $R = (g - L')\,z$, und da die Umdrehung als gleichförmig angenommen wird, so ist auch g bestimmt, und folglich auch $g - L'$ beständig. Vergleicht man dies mit §. 51, so sieht man, daß die Bedingungen des Gleichgewichtes durch die Kräfte P, Q, R vollkommen erfüllt werden; es ist nemlich

$$P : Q : R = x : \left(\frac{L' - g}{L}\right) y : \left(\frac{L' - g}{L}\right) z,$$

wo man also nur $\frac{L - g}{L} = m$ zu nehmen hat, da-

mit das Verhältniß der Kräfte mit jenem ganz übereinkomme.

Zugleich erhellet aber, daß es nur ein bestimmtes m geben werde, welches der Bedingung entspricht, und also nur ein bestimmtes Verhältniß der Axen des Sphäroids, bey dem das Gleichgewicht seiner Theile möglich ist.

§. 57.

Aufgabe. Wenn die Umdrehungs-Geschwindigkeit eines flüssigen Körpers um seine Axe gegeben ist, und man voraussetzt, er habe durchs Drehen die Form eines Rotations-Sphäroids angenommen, bey der das Gleichgewicht seiner Theile bestehen kann, das Verhältniß der Axen zu finden, die dies Sphäroid haben muß.

Auflösung. 1) Wenn wir in die Gleichung $\frac{L' - g}{L} = m$, oder $mL - L' + g = 0$, welche die Bedingung des Gleichgewichtes erfüllt, für L und L′ die Werthe §. 56, und für $m = \frac{1}{1 + \mu^2}$ substituiren, so wird:

$$\frac{3M}{k^3 \mu^3}(\mu - \text{arc tang}\,\mu) - \frac{3M(1 + \mu^2)}{2k^3\mu^3}\left(\text{arc tang}\,\mu - \frac{\mu}{1 + \mu^2}\right) + (1 + \mu^2)\,g = 0$$

oder mit M dividirt, und die Glieder, welche arc tang μ enthalten, mit einander verbunden:

$$\frac{9}{2k^3\mu^2} - \frac{(9+3\mu^2)\,\text{arc tang}\,\mu}{2k^3\mu^3} + \frac{(1+\mu^2)g}{M} = 0.$$

2) Substituirt man nun für M den Werth $\frac{4}{3}\pi\varrho k^3(1+\mu^2)$, so wird das letzte Glied $= \frac{3g}{4\pi\varrho k^3}$, statt dessen wir $\frac{q}{k^3}$ setzen wollen, so daß $q = \frac{3g}{4\pi\varrho}$ angenommen wird. Dadurch entsteht, wenn noch mit $2k^3\mu^3$ allenthalben multiplicirt wird:

$9\mu - (9+3\mu^2)\,\text{arc tang}\,\mu + 2\mu^3 q = 0$ oder:

$$\text{arc tang}\,\mu - \frac{9\mu + 2\mu^3 q}{9+3\mu^2} = 0.$$

3) Da die Umdrehungsgeschwindigkeit, also auch g gegeben ist, so wie ϱ die Dichte des Körpers, so weiß man auch q, also kann man aus der Gleichung μ finden.

4) Will man μ durch eine Reihe darstellen, welche nach q fortgehen soll, so setze man für arc tang μ die bekannte Reihe $\mu - \frac{1}{3}\mu^3 + \frac{1}{5}\mu^5 - \ldots$; alsdann wird $9\mu + 2\mu^3 q = (9+3\mu^2)$ arc tang $\mu = 9\mu + \frac{4}{5}\mu^5 - \frac{24}{35}\mu^7 + \frac{4}{7}\mu^9 - \ldots$ und folglich $q = \frac{2}{5}\mu^2 - \frac{12}{35}\mu^4 + \frac{2}{7}\mu^6 - \ldots$

5) Man setze jetzt $\mu^2 = \alpha q + \beta q^2 + \gamma q^3 + \ldots$ so wird:

$$\mu^4 = \alpha^2 q^2 + 2\alpha\beta q^3 + (\beta^2 + 2\alpha\gamma) q^4 + (2\alpha\delta + 2\beta\gamma) q^5 + \ldots$$

$$\mu^6 = \alpha^3 q^3 + \left.\begin{array}{l} 3\alpha^2\beta \\ + 3\alpha\gamma \end{array}\right\} q^4 + \left.\begin{array}{l} 3\alpha\beta^2 \\ + 3\alpha^2\gamma \end{array}\right\} q^5 + \ldots$$

also $q = \frac{2}{5}\alpha q + \left.\begin{array}{l} \frac{2}{5}\beta \\ - \frac{12}{35}\alpha^2 \end{array}\right\} q^2 + \left.\begin{array}{l} \frac{2}{5}\gamma \\ - \frac{24}{35}\alpha\beta \\ + \frac{2}{7}\alpha^3 \end{array}\right\} q^3 + \ldots$

oder, wenn man mit q dividirt, und die Gleichung auf o bringt:

$$0 = (\tfrac{2}{5}\alpha - 1) + (\tfrac{2}{5}\beta - \tfrac{12}{35}\alpha^2) q^2 + (\tfrac{2}{5}\gamma - \tfrac{24}{35}\alpha\beta + \tfrac{2}{7}\alpha^3) q^2 + \ldots$$

6) Folglich hat man $\alpha = \frac{5}{2}$, $\frac{2}{5}\beta - \frac{15}{7} = 0$, also $\beta = \frac{75}{14}$, $\frac{2}{5}\gamma - \frac{450}{49} + \frac{125}{28} = 0$, also $\gamma = \frac{4625}{392}$ u. s. f. und daher

$$\mu^2 = \tfrac{5}{2} q + \tfrac{75}{14} q^2 + \tfrac{4625}{392} q^3 + \ldots\ldots$$

7) Da $m = \frac{1}{1 + \mu^2}$, so wird die andere halbe Axe, oder der Halbmesser des Aequators $\frac{k}{\sqrt{m}} = k\sqrt{(1 + \mu^2)} = k\sqrt{(1 + \frac{5}{2}q + \frac{75}{14}q^2 + \ldots)}$ und wenn man aus dieser Reihe die Quadratwurzel zieht, so erhält man für diesen Halbmesser: $k\,(1 + \frac{5}{4} q + \frac{425}{224} q^2 + \ldots)$. Demnach ist das Verhältniß der Polaraxe zum Durchmesser des Aequators wie $1 : 1 + \frac{5}{4} q + \frac{425}{224} q^2 + \ldots$

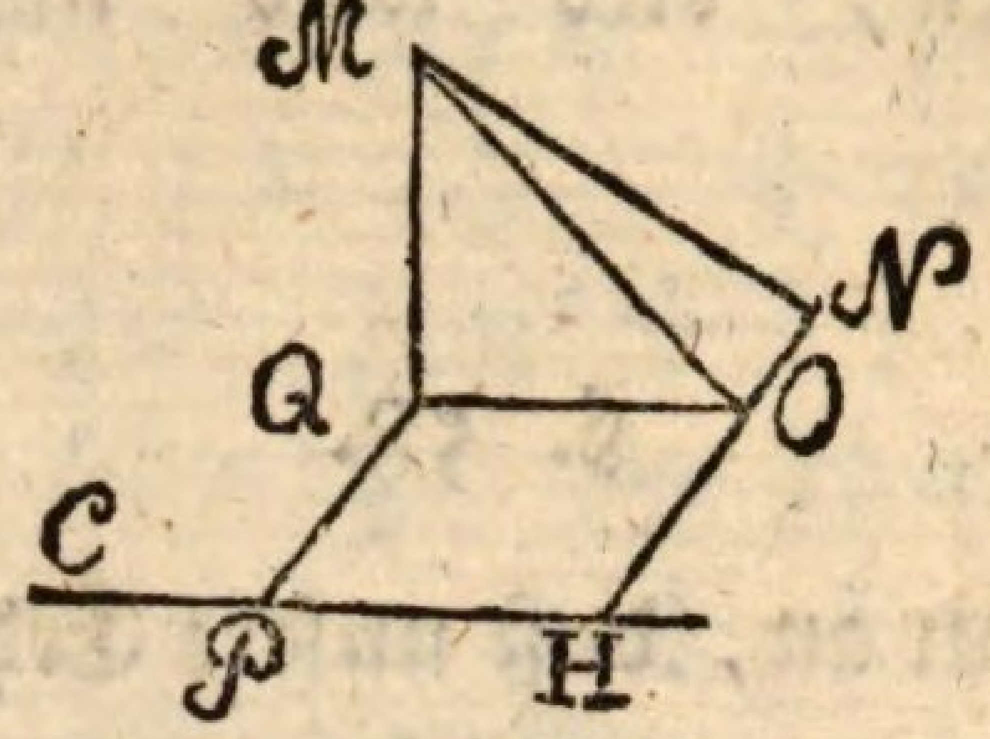
8) Ist die Umdrehungs-Geschwindigkeit des Körpers nicht allzu groß, so ist begreiflich g sehr

klein

klein, also auch q und die erhaltene Reihe convergirt sehr schnell, dies wird nachher deutlicher werden.

§. 58.

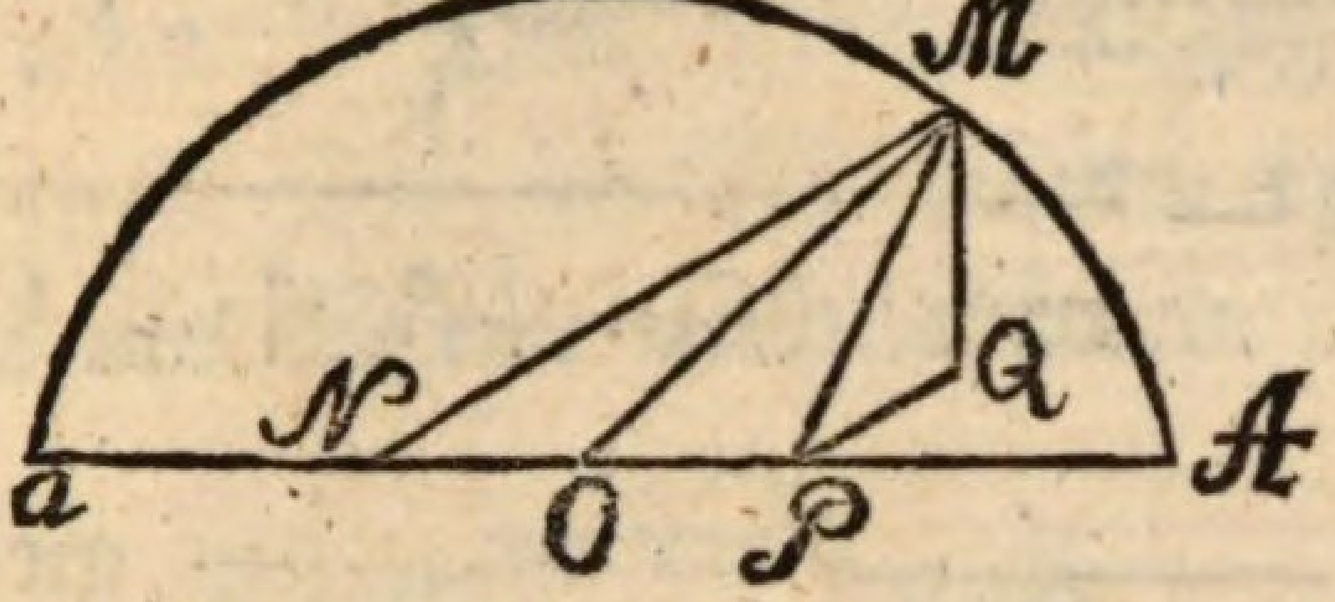
Nimmt man an, daß unsere Erde anfangs flüssig gewesen ist, und in diesem Zustande durch die tägliche Umdrehung ihre sphäroidische Gestalt bekommen habe, so läßt sich von dem bisher Vorgetragenen leicht auf sie eine Anwendung machen. Bevor wir aber aus ihrer Umdrehungsgeschwindigkeit das Verhältniß ihrer beyden Axen bestimmen können, wird es nöthig seyn, erst einiges über das Gesetz der Schwere auf der Oberfläche voranzuschicken. Unter Schwere hat man hier nemlich die Kraft zu verstehen, wovon ein Körper an der Oberfläche würklich getrieben wird, also die mittlere Kraft, die aus Attraction und Schwungkraft zugleich hervorgebracht wird. Sie ist folglich eine Zusammensetzung aus den Kräften P, Q, R, und wegen des im §. 54 am Ende Gesagten gilt also von ihr, was (52) von einem in Ruhe befindlichen flüssigen Körper bewiesen ist, nemlich daß ihre Richtung auf der Oberfläche senkrecht sey.



Außerdem aber, daß sie nach der Normale MN würkt, verhält sie sich auch wie die Normale: denn man setze diese $= t$, die Schwere $= p$, und zerlege sie nach den beyden aufeinander senkrechten Richtungen MQ und QN, so wird die Kraft, die daraus nach MQ entspringt $= \frac{p\,MQ}{MN} = \frac{pz}{t}$. Man hat also $R = -\frac{pz}{t}$, und wenn für R der Werth aus §. 56 substituirt wird, $(L' - g)\, z = \frac{pz}{t}$, oder $p = (L' - g)\, t$, so daß zusammengehörige p und t das unveränderliche Verhältniß $(L' - g) : 1$ zu einander haben.

§. 59.

Die Normale beym Rotations-Sphäroid geht durch die Umdrehungsaxe (7) und liegt also in der Ebene des Meridians, in dem sich der Punct befindet. Es sey daher Aa die Polaraxe des Sphä-



roids, M ein Punct in seiner Oberfläche, dem die Coordinaten OP = x, PQ = y, und MQ = z zugehören, so liegt die Normale MN in der Ellipse AMa, welche, weil sie ein Schnitt des Sphäroids durch Aa ist, k und $\frac{k}{\sqrt{m}}$ zu ihren halben Axen hat, weshalb ihre Gleichung $MP^2 = \frac{k^2 - OP^2}{m}$ ist, oder $u^2 = \frac{k^2}{m} - \frac{x^2}{m}$, wenn MP = u gesetzt wird. Diese differenziire man, so bekommt man $udu = -\frac{xdx}{m}$, und daraus den Werth der Subnormale $NP = -\frac{udu}{dx} = \frac{x}{m}$ (die Formel $\frac{udu}{dx}$ hat hier das Zeichen — weil die Abscissen x aus dem Mittelpuncte genommen werden). Setzen wir nun die Normale MN = t, und des Punctes M Breite = ψ, wodurch der Winkel MNA als ihr Complement = $90° - \psi$ wird, so erhalten wir $t \operatorname{Cos} \psi = MP = \sqrt{(y^2 + z^2)}$, und $t \operatorname{Sin} \psi = PN = \frac{x}{m}$, also $x = mt \operatorname{Sin} \psi$. Wird dies in die Gleichung $k^2 = x^2 + m(y^2 + z^2)$ substi-

tuirt, so wird endlich $k^2 = (m^2 \text{Sin}\,\psi^2 + m \text{Cos}\,\psi^2)\,t^2$, welches

$$t = \frac{k}{m\sqrt{(\text{Sin}\,\psi^2 + \frac{1}{m}\text{Cos}\,\psi^2)}}$$

$$= \frac{k}{m\sqrt{(1 + \mu^2 \text{Cos}\,\psi^2)}}$$ giebt.

§. 60.

Aufgabe. Das Gesetz der Schwere auf der Oberfläche unserer Erde oder eines andern Planeten, der durch drehende Bewegung die Gestalt eines Rotations-Sphäroides angenommen hat, zu bestimmen.

Auflösung. 1) Es sey P die Schwere unter dem Pole; p die für die Breite ψ, so ist (58. 59)

$$P : p = \frac{k}{m} : \frac{k}{m\sqrt{(1 + \mu^2 \text{Cos}\,\psi^2)}},$$ also

$$p = \frac{P}{\sqrt{(1 + \mu^2 \text{Cos}\,\psi^2)}} = P\,(1 - \tfrac{1}{2}\mu^2 \text{Cos}\,\psi^2 + \tfrac{3}{8}\mu^4 \text{Cos}\,\psi^4 - \ldots)$$

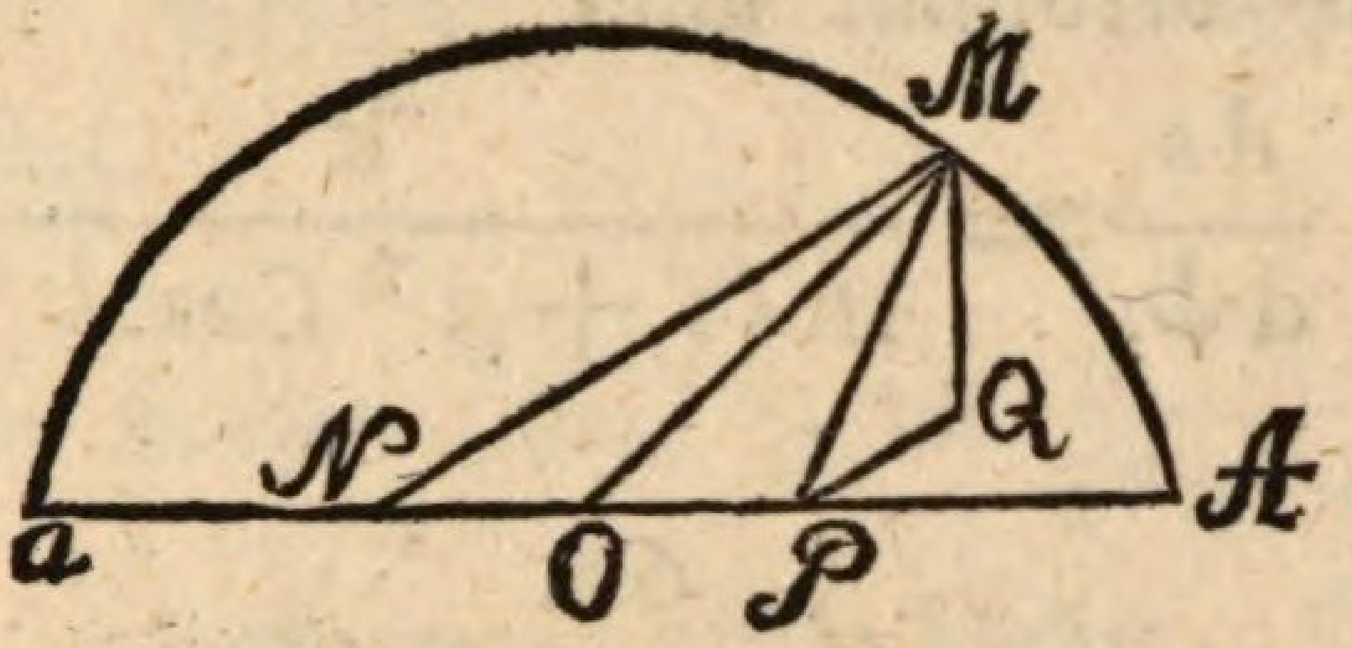
2) Weicht das Sphäroid wenig von der Kugel ab, so daß die Potenzen von μ^2 weggelassen werden können, so behält man:

$$p = P\,(1 - \tfrac{1}{2}\mu^2 \text{Cos}\,\psi^2) = P\,(1 - \tfrac{5}{4} q \,\text{Cos}\,\psi^2),$$

also $P - p = \frac{5}{4} q \,.\, P \,\text{Cos}\,\psi^2$; woraus erhellet, daß unter dieser Voraussetzung die Schwere vom Pole nach dem Aequator zu im Verhältnisse des Quadrats des Kosinus der Breite abnimmt.

§. 61.

Aufgabe. Den Krümmungshalbmesser für einen gegebenen Ort im Meridiane des Sphäroids durch des Ortes Breite auszudrücken.



Auflösung. 1) Es sey M der gegebene Punct im Meridiane AMa, seine Breite $= \psi$, so ist MNA $= 90° - \psi$, ferner sey der Bogen AM $= s$, die Applikate MP $= u$, der Krümmungshalbmesser für M $= r$, so ist bekanntlich $r = \frac{ds}{d\psi}$ · weil MNP zugleich die Amplitude des Bogens AM ist.

2) Nun ist

$$u = MN \operatorname{Cos} \psi = \frac{k \operatorname{Cos} \psi}{m \sqrt{(1 + \mu^2 \operatorname{Cos} \psi^2)}}, \text{ und}$$

$$PN = \frac{x}{m} = MN \operatorname{Sin} \psi = \frac{k \operatorname{Sin} \psi}{m \sqrt{(1 + \mu^2 \operatorname{Cos} \psi^2)}},$$

$$\text{also } x = \frac{k \operatorname{Sin} \psi}{\sqrt{(1 + \mu^2 \operatorname{Cos} \psi^2)}}.$$

3) Diese Werthe für u und x differenziirt geben:

$$du = \frac{-k \operatorname{Sin} \psi \, d\psi}{m \sqrt{(1 + \mu^2 \operatorname{Cos} \psi^2)}^3}.$$

$$dx = \frac{k \operatorname{Cos} \psi \, d\psi}{m \sqrt{(1 + \mu^2 \operatorname{Cos} \psi^2)^3}}, \text{ woraus}$$

$$ds = \sqrt{(dx^2 + du^2)} = \frac{k \, d\psi}{m (1 + \mu^2 \operatorname{Cos} \psi^2)^{\frac{3}{2}}}$$

wird, folglich bekommt man

$$r = \frac{ds}{d\psi} = \frac{k}{m (1 + \mu^2 \operatorname{Cos} \psi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

§. 62.

Aufgabe. Aus der Umdrehungszeit der Erde, und der Länge des Sekundenpendels, so wie der Länge eines Meridiangrades unter der Breite ψ das Verhältniß der Axen zu finden.

Auflösung. 1) Es sey l die Länge des Sekundenpendels unter der Breite ψ, so ist $\pi \sqrt{\frac{l}{fp}} = 1$, $p = \frac{\pi^2 l}{f}$, wo f der Factor der Formel $f dt^2$ ist, die (11) den Weg anzeigt, durch den ein Körper von der beschleunigenden Kraft 1 im Zeittheilchen dt getrieben wird.

2) Der Weg, wodurch ein Körper in der Entfernung 1 von der Schwungkraft g getrieben wird, ist nach §. 55 $= d\varphi^2$, und wenn T die Umdrehungszeit in Sekunden bedeutet, so ist $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T}$,

also jener Weg $= \left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right) dt^2$, folglich

$$f\,dt^2 : \left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right) dt^2 = 1 : g,$$ also:

$g = \frac{4\pi^2}{fT^2}$, und $q = \frac{3\pi}{fT^2\varrho}$, aus welcher Formel die arbiträren Größen f und ϱ noch weggeschafft werden müssen.

3) Wir hatten (60) $p = \frac{P}{\sqrt{(1+\mu^2 \operatorname{Cos}\psi^2)}}$, wo P noch zu bestimmen übrig bleibt. Die Schwere unter dem Pole besteht bloß aus den Attractionskräften A, B und C, weil daselbst die Schwungkraft $= 0$ ist, und da a im gegenwärtigen Falle $= k$, b und c aber $= 0$ sind, so fallen B und C weg, und es wird $P = A = \frac{4\pi\varrho k(1+\mu^2)}{\mu^3}$ $(\mu - \operatorname{arc\,tang}\mu)$.

Also $p = \frac{4\pi\varrho k(1+\mu^2)(\mu - \operatorname{arc\,tang}\mu)}{\mu^3\sqrt{(1+\mu^2\operatorname{Cos}\psi^2)}}$.

4) Setzt man nun aus §. 57. für arc tang den Werth $\frac{9\mu + 2\mu^3 q}{9+3\mu^2}$, so erhält man

$p = \frac{4\pi\varrho k(1+\mu^2)(3-2q)}{(9+3\mu^2)\sqrt{(1+\mu^2\operatorname{Cos}\psi^2)}}$, und dies mit (1) verglichen, giebt:

$\frac{\pi^2 l}{f} = \frac{4\pi\varrho k(1+\mu^2)(3-2q)}{(9+3\mu^2)\sqrt{(1+\mu^2\operatorname{Cos}\psi^2)}}$, also

$$f\varrho = \frac{\pi l\,.\,(9+3\mu^2)\sqrt{(1+\mu^2\operatorname{Cos}\psi^2)}}{4k(1+\mu^2)(3-2q)}.$$

5) Wenn man dies für $f\varrho$ in (2) substituirt, so bekommt man $q = \frac{4k(1+\mu^2)(3-2q)}{T^2 l(3+\mu^2)\sqrt{(1+\mu^2 \mathrm{Cos}\,\psi^2)}}$. Aus dieser Formel ist nun noch k wegzuschaffen, und das geschieht folgendermaaßen:

6) Es sey c ein Grad unter der Breite ψ, so wird, wenn wir in der Formel $r = \frac{ds}{d\psi} = \frac{k}{m(1+\mu^2 \mathrm{Cos}\,\psi^2)^{\frac{3}{2}}}$ für $d\psi$ die Länge eines Gradbogens $\frac{\pi}{180}$, und für ds die gedachte Länge c setzen: $\frac{k(1+\mu^2)}{\sqrt{(1+\mu^2 \mathrm{Cos}\,\psi^2)^{\frac{3}{3}}}} = \frac{180\,c}{\pi}$ und daraus $k = \frac{(1+\mu^2 \mathrm{Cos}\,\psi^2)^{\frac{3}{2}} \cdot 180\,c}{\pi(1+\mu^2)}$. Dies für k in (5) substituirt, giebt endlich

$$q = \frac{720\,c(3-2q)(1+\mu^2 \mathrm{Cos}\,\psi^2)}{(3+\mu^2)\pi T^2 \cdot l}.$$

7) In dieser Gleichung werden T, l, c und ψ als bekannt vorausgesetzt, sie enthält also zwey unbekannte Größen μ und q; aber vermöge der Gleichung in §. 57 zwischen μ und q hängt q von μ ab, und solchergestalt befindet sich in ihr nur eine unbekannte Größe, nemlich μ, und diese läßt sich also daraus bestimmen. Statt der Gleichung zwi-

schen μ und q bediene man sich aber lieber der (ebendas.) gefundenen Reihe:

$$q = \tfrac{2}{5}\mu^2 - \tfrac{12}{35}\mu^4 + \ldots$$

8) Nun ist nach den Messungen in Frankreich für $\psi = 48^\circ\, 50'$, $c = 57074$ Toisen, $l = 440'',67$, und außerdem $T = 86164''$, wodurch

$$q = \frac{0{,}003454374\,(1 - \frac{2}{3}q)\,(1 + \mu^2\,(\mathrm{Cos}\,48^\circ\,50')^2)}{1 + \frac{1}{3}\mu^2}$$

wird; vermittelst jener Reihe bekommt man daher diese Gleichung:

$$\left.\begin{matrix}\frac{2}{5}\mu^2 - \frac{12}{35}\mu^4 \\ + \frac{8}{75}\mu^4\end{matrix}\right\} = 0{,}003454374\,(1 - (\mathrm{Cos}\,\psi^2 - \tfrac{1}{3})\,\mu^2) =$$

$1 + 0{,}0999618\,\mu^2$ oder $0{,}4\,\mu^2 - 0{,}276175196\,\mu^4 = 0{,}003454374$, welche $\mu^2 = 0{,}008687763$, und $q = 0{,}003449414$ giebt.

9) Es wird also $\frac{1}{m} = \sqrt{(1 + \mu^2)} = 1{,}004334487$, und folglich das Verhältniß der beyden Axen $k : \frac{k}{\sqrt{m}} = 1 : \sqrt{(1 + \mu^2)}$, nahe wie $230\,\frac{7}{10} : 231\,\frac{7}{10}$.

§. 63.

Zu der Bestimmung der Schwungkraft g wurde erfordert, die Länge des Secundenpendels, und eines Meridiangrades für irgend eine Breite zu wissen. Um indeß zu zeigen, daß dies nicht unbedingt nothwendig sey, wollen wir noch kurz ein Verfahren beyfügen, wie man dahin auch durch die Theo-

rie des Mondes gelangen könne. Es besteht im folgenden:

1) Man weiß aus §. 16. I. Thl., daß ein Planet eben die Umlaufszeit haben würde, wenn er sich in mittlerer Entfernung im Kreise um den Mittelpunct der Kraft bewegte; daher läßt sich annehmen, der Mond durchlaufe in einem periodischen Monate einen Kreis, dessen Halbmesser = seiner mittlern Entfernung von der Erde ist. Diese wollen wir r nennen, seine Umlaufszeit t, die Masse der Erde M, so ist die Kraft, welche den Mond in seiner Bahn hält, und folglich auch die Schwungkraft des Mondes $= \frac{M}{r^2}$.

2) Da der Mond in der Zeit t den Raum $2\pi r$ zurücklegt, so ist seine Geschwindigkeit, oder sein Weg in 1 Secunde $= \frac{2\pi r}{t}$, und das Element seiner Bewegung in $dt = \frac{2\pi r dt}{t}$, folglich der Raum, durch den die Schwungkraft ihn treibt (§. 4. I. Thl.), $t = \frac{4\pi^2 r dt}{t^2}$, also $\frac{fM dt^2}{r^2} = \frac{4\pi^2 r dt^2}{t^2}$, woraus $f = \frac{4r^3\pi^2}{t^2 M}$ wird.

3) Nennt man dagegen T die Umdrehungszeit der Erde, so beschreibt ein Element derselben in der

Entfernung 1 vom Mittelpuncte den Weg $\frac{2\pi dt}{T}$ in dt, folglich ist der Raum, den die Schwungkraft g einen Körper in dt zurücklegen läßt, $= \frac{4\pi^2 dt^2}{T^2}$. Da dieser nun auch $= fgdt^2$ seyn muß, so wird hieraus $f = \frac{4\pi^2}{T^2 g}$ also $\frac{4\pi^2}{T^2 g} = \frac{4r^3\pi^2}{t^2 M}$, wodurch $g = \frac{t^2 M}{r^3 T^2}$ wird.

4) Setzt man endlich für M seinen Werth $\frac{4k^3\pi\varrho}{3}(1+\mu^2)$, so erhält man:

$$g = \frac{4\pi k^3 \varrho t^2 (1+\mu^2)}{3r^3T^2}, \text{ und } q = \frac{3g}{4\pi\varrho}$$

$$= \frac{k^3t^2(1+\mu^2)}{r^3T^2} = (1+\mu^2)\left(\frac{k}{r}\right)^3 \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^2.$$

5) Es sey die mittlere Aequatoreal-Parallaxe des Mondes $= \pi$, so wird $\frac{k(1+\mu^2)^{\frac{1}{2}}}{r} = \text{Sin}\,\pi$,

also $\frac{k}{r} = \text{Sin}\,\pi \,.\, (1+\mu^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{k}{r}\right)^3$ $= \text{Sin}\,\pi^3 \,.\, (1+\mu^2)^{-\frac{3}{2}}$, folglich wenn dies substituirt wird:

$$q = (1+\mu^2)^{-\frac{1}{2}} \,.\, \left(\frac{t}{T}\right)^2 \text{Sin}\,\pi^3, \text{ oder } (1+\mu^2)^{\frac{1}{2}} q$$

$$= \left(\frac{t}{T}\right)^2 . \text{ Sin}\,\pi^3.$$

6) Nach den neuern Beobachtungen ist $\pi = 57'10''$, also $\log \operatorname{Sin} \pi = 8{,}2208490$, $\log (\operatorname{Sin} \pi)^3 = 0{,}6625470 - 6$,

$$t = 2576591'' \text{ also: } \log \left(\frac{t}{T}\right)^2 = 2{,}9514392$$

$$\log [(1 + \mu^2)^{\frac{1}{2}} q] = 0{,}6139862 - 3$$

$(1 + \mu^2)^{\frac{1}{2}} q = 0{,}004111369$, oder, wenn man für q die Reihe §. 57 gebraucht: $\frac{2}{5} \mu^2 - \frac{1}{7} \mu^4 = 0{,}004111369$, woraus man $\mu^2 = 0{,}0103$ erhält. Dies gäbe $\sqrt{(1 + \mu^2)} = 0{,}0051$, oder das Verhältniß der beyden Axen wie 200 : 201.

7) Durch die Wirkung der Sonne wird die Schwere des Mondes gegen die Erde im Ganzen ungefähr um 0,00056 vermindert, also würde ohne diese Störung der mittlere Halbmesser der Mondsbahn $= r \times 1{,}00056$ seyn, weil sich die Schwungkräfte wie die Radien verhalten; aber die Aenderung, die dies in dem Axen-Verhältnisse bewürkt, ist unbeträchtlich.

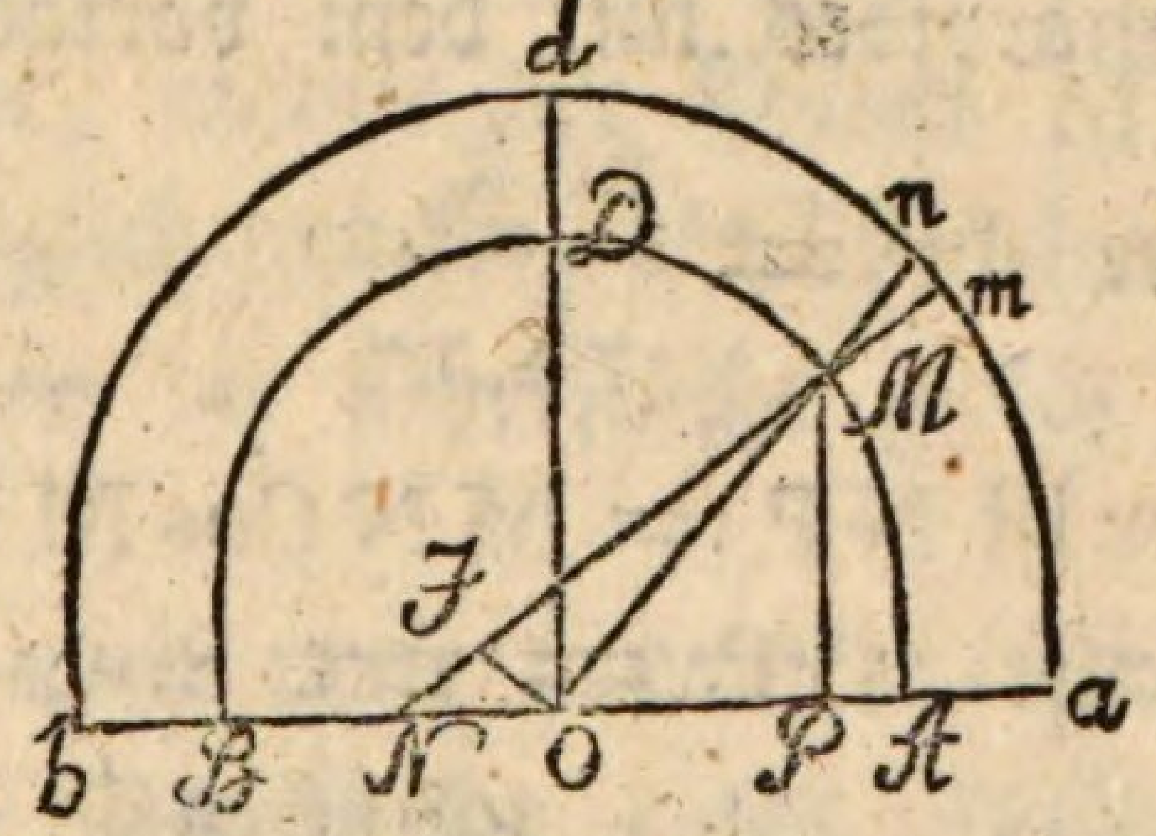
§. 64.

Ueber die Bestimmung des Verhältnisses der Axen für das Gleichgewicht bemerke ich noch folgendes:

Wenn die Erde ein Sphäroid ist, und die Umdrehung T (62) hat, so kann das Verhältniß ihrer beyden Axen kein anderes seyn als das gefundene:

denn mit keinem andern Werthe für m kann die Gleichung §. 57. bestehen, und ohne diese das Gleichgewicht nicht. Aber man kann ferner fragen: muß dann nun für diese Figur des Sphäroides nothwendig das Gleichgewicht statt finden? Dies beweißt Newton dadurch, daß er den flüssigen Körper in pyramidenförmige, nach dem Mittelpuncte zulaufende Säulen sich getheilt denkt, und von diesen zeigt, daß sie im gedachten Falle gleich stark gegen den Mittelpunct gravitiren, und so einander erhalten. Dies Verfahren läßt sich hier nicht in der Kürze auseinandersetzen, man kann aber die Frage mittelst eines von Hr. Clairaut gebrauchten Theorems folgendermaaßen beantworten:

§. 65.



Lehrsatz. Wenn das Sphäroid eine solche Gestalt hat, daß $Pdx + Qdy + Rdz$ an seiner Oberfläche $= 0$ ist, so ist die ganze flüssige Masse im Gleichgewichte.

Beweis. 1) Für die angenommene Bedingung geht die Richtung der Schwere an der Ober-

fläche nach der Normale, und verhält sich wie diese (58).

2) Man denke sich das Sphäroid in lauter unendlich dünne, von concentrischen und ähnlichen Oberflächen begrenzte Schichten getheilt, so liegt innerhalb jeder Schicht ein Sphäroid, das dem ganzen ähnlich ist. Ein solches sey AMB, seine halbe Umdrehungs-Axe OA = k, der Halbmesser des Aequators OD $= \frac{k}{\sqrt{m}}$, wo m der Gleichung (57) gemäß seyn soll; der Radius OM heiße r, die Normale MN, t, und die Breite für M, ψ.

3) Das Sphäroid werde um eine solcher Schichten größer, dadurch wachse k um dk, so wächst MO um Mm = dr, und wegen der Aehnlichkeit des neuen Sphäroides mit dem vorigen, ist dr : dk = r : k oder $dr = \frac{rdk}{k}$.

4) Ferner ist $NP = MN \operatorname{Cos} MNP = t \operatorname{Sin} \psi$, und die Abscisse $OP = mt \operatorname{Sin} \psi$, also ON $= (1 - m) t \operatorname{Sin} \psi = \frac{\mu^2 t \operatorname{Sin} \psi}{1 + \mu^2}$. Fällt man also OI auf MN senkrecht, so wird $NI = NO \operatorname{Cos} INO = NO \operatorname{Sin} \psi = \frac{\mu^2 t \operatorname{Sin} \psi^2}{1 + \mu^2}$, folglich IM = t $- \frac{\mu^2 t \operatorname{Sin} \psi^2}{1 + \mu^2} = mt (1 + \mu^2 \operatorname{Cos} \psi^2)$ $= k \sqrt{} (1 + \mu^2 \operatorname{Cos} \psi^2)$ (59).

5) Die Dreyecke Mnm und MIO sind ähnlich, also Mn : Mm = MI : MO
$= k\sqrt{}(1 + \mu^2 \text{Cos}\,\psi^2) : r$, folglich wird Mn, die senkrechte Dicke der Schicht bey M,

$$= \frac{kdr\sqrt{}(1 + \mu^2 \text{Cos}\,\psi^2)}{r} = dk\sqrt{}(1 + \mu^2 \text{Cos}\,\psi^2)$$

(n 2).

6) Man setze, das Sphäroid AMDB sey jetzt nur allein vorhanden, so gilt auch von ihm, was n 1 vom ganzen Sphäroide gesagt ist, weil die Gleichung $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ allein durch m erfüllt wird, und von k nicht abhängt. Wenn also die Schwere für den Pol P heißt, so ist sie für den Punct $M = \frac{P}{\sqrt{}(1 + \mu^2 \text{Cos}\,\psi^2)}$. Diese mit der Höhe des Elementes multiplicirt, giebt Pdk für das Gewicht, womit der Punct M senkrecht gedrückt wird, folglich drücken die Theilchen der Schicht allenthalben gegen die Oberfläche gleich stark.

7) Wenn aber nach hydrostatischen Grundsätzen alle Puncte der Oberfläche eines flüssigen Körpers, der im Gleichgewichte ist, mit gleicher Kraft gedrückt werden, so bleibt das Gleichgewicht nach wie vor. Gesetzt also, das Sphäroid wäre vorhin im Gleichgewichte gewesen, so würde durch die neu hinzugekommene Schicht das Gleichgewicht nicht gestört werden, oder: es besteht allemal für n + 1 Schichten, wenn es für n Schichten statt fand.

8) Da man nun hier von Null ausgehen kann, so folgt, daß das Gleichgewicht für so viele Schichten gelte als man annehmen will, und daß also diese Eigenschaft jedem Sphäroide zukomme, dessen m die Bedingungs-Gleichung erfüllt; k mag seyn, was man will.

Anmerkung. 1) Wenn die flüssige Masse bey ihrer sphäroidischen Gestalt und ihrer Umwälzung um die Polar-Axe sich ins Gleichgewicht gesetzt hat, so wird sie unverändert um diese Axe sich zu drehen fortfahren. Herr d'Alembert hat nemlich gezeigt, daß bey allen runden (durch Umdrehung einer Figur entstandenen) Körpern die Axe, um welche man die Figur sich drehen läßt, um den Körper hervorzubringen, eine freye Axe des Körpers sey. Man kann sich beym Sphäroid auch leicht davon durch die Integrale $\int xy\,dM$ und $\int xz\,dM$ überzeugen, welche beyde $= 0$ werden, wie für eine solche Axe erfordert wird.

2) Gesetzt die flüssige Masse erhärte nach und nach, so können dabey die Theile entweder ihr voriges Volumen behalten, oder dichter werden. In jenem Falle kann offenbar keine Veränderung, weder in der Form noch in der Umwälzung des Körpers, vorgehen; wofern im letztern Falle die Verdichtung durch den ganzen Körper gleichförmig geschieht, so bleibt das Volumen

lumen eines jeden Theiles dem vorigen proportional, und der Körper behält nicht nur seine sphäroidische Gestalt, sondern bleibt auch dem anfänglichen Sphäroide ähnlich. Also ändert sich weder das Verhältniß der Axen noch die Umwälzung, außer daß etwa das verminderte Moment der Trägheit eine Aenderung in der Geschwindigkeit hervorbringen könnte.

3) Daraus folgt, daß wenn die Erde homogen ist, das Verhältniß der Axe in ihrem gegenwärtigen festen Zustande noch dasselbe seyn müsse, als da sie ein flüssiger Körper war.

4) Sollte die Voraussetzung, daß die Erde durchweg von gleicher Dichte sey, nicht im strengsten Sinne wahr seyn, so ist doch gewiß diese Verschiedenheit sehr gering, da die Erfahrung uns lehrt, daß die Schwere würklich den Gesetzen auf der Oberfläche folgt, wie die Theorie sie angiebt, auch lassen sich über ungleiche Dichte im Innern der Erde keine sichere Hypothesen aufstellen. Clairaut betrachtet deren einige in seinem bekannten Werke über die Gestalt der Erde,*) und sucht, welche Gestalt dabey das Sphäroid annehmen muß, wenn die Theile einander im Gleichgewichte erhalten sollen.

§. 66. Es sey für einen andern Plane-

*) Traité de la figure de la terre.

ten T', ϱ', g', q' und μ' das, was für die Erde T, ϱ, g, q und μ genannt ist, so hat man: $q' = \frac{3g'}{4\pi\varrho'}$ (57), und da sich die Schwungkräfte bey gleichen Entfernungeu wie die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten, so ist ferner $g : g' = \frac{4\pi^2}{T^2} : \frac{4\pi^2}{T'^2} = T'^2 : T^2$ also $q : q' = T'^2 \varrho' : T^2 \varrho$.

Man sieht hieraus, daß der von einigen Schriftstellern aufgestellte Satz: daß die Differenz der Axen dividirt durch die kleinere Axe bey verschiedenen Planeten sich verkehrt verhalte wie das Quadrat der Umlaufszeit und verkehrt wie die Dichte, nur beynahe wahr sey, weil q sich nicht genau verhält wie μ^2, also nicht genau $q : q' = \mu^2 : \mu'^2$ ist.

Exempel. Für Jupiter ist $\frac{\varrho'}{\varrho} = 0{,}22765$, $T' = 9^h 55' 33'' = 35733''$, außerdem ist $T = 86164''$, $q = 0{,}003449414$,

$$\log \frac{\varrho}{\varrho'} = 0{,}6427323$$

$$\log \left(\frac{T}{T'}\right)^2 = 0{,}7645128$$

$$\log q = 0{,}5377449 - 3$$

$$\log q' = 0{,}9449900 - 2, \text{ also}$$

$q' = 0{,}088103$, woraus $\mu^2 = \frac{5}{2} q + \frac{75}{14} q^2 + . = 0{,}2618$ und $\sqrt{(1 + \mu^2)} = 1{,}123$ wird.

Der Theorie nach wäre also das Verhältniß des kleinern Durchmessers zum großen beym Jupiter wie 10 : $11\frac{1}{7}$ beynahe, welches mit den Beobachtungen so genau übereinstimmt, als man von Rechnungen dieser Art erwarten kann. Diesen zu Folge verhalten sie sich nemlich wie 12 : 13.

Sphäroiden von sehr großer Abplattung; Grenze der elliptischen Form.

§. 67.

1) Da der Werth von μ durch die Gleichung
$$\frac{9\mu + 2\mu^3 q}{9 + 3\mu^2} - \text{arc tang}\,\mu = 0$$
bestimmt wird, so fragt es sich, ob nicht mehrere μ der Gleichung Gnüge leisten können. Um dies auszumachen, setze man den ganzen Ausdruck linker Hand $= P$, und betrachte ihn als bloße Function von μ, indem man q als gegeben ansieht, so erhält man durch Differenziirung
$$\frac{dP}{d\mu} = \frac{6\mu^2(\mu^4 q + \mu^2(10q - 6) + 9q)}{(9 + 3\mu^2)^2(1 + \mu^2)},$$
welche Formel Π heißen mag, so daß $P = \int \Pi\, d\mu$ ist, und zwar so genommen, daß es für $\mu = 0$ verschwindet.

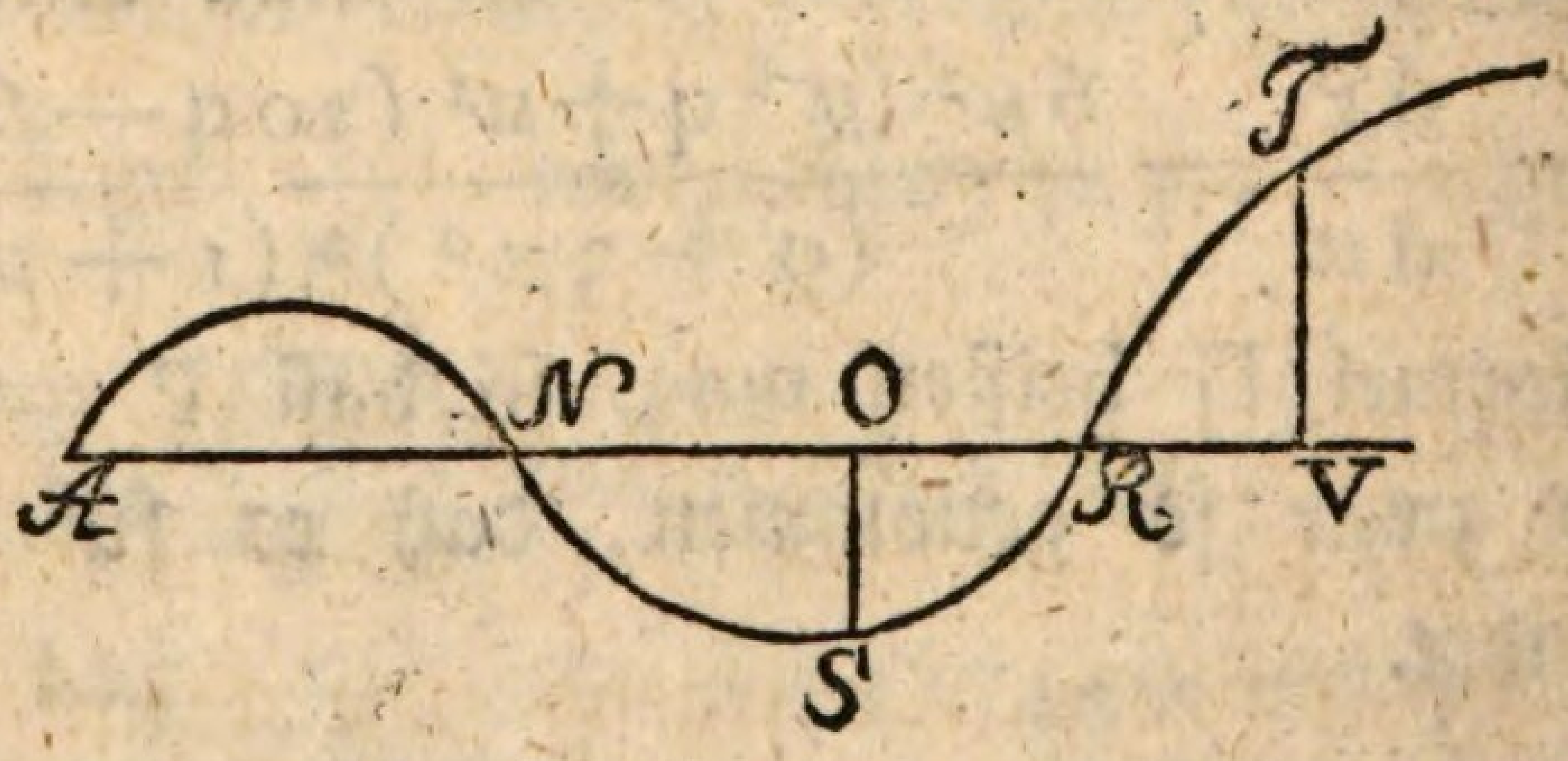
2) Man nehme eine Kurve an, zu deren Abscissen μ die Werthe von Π als Applicaten gehören, so hat man für $\Pi = 0$ die Gleichung $\mu^4 q + \mu^2$

$(10q - 6) + 9q = 0$, welche $\mu = \pm \surd \left(\frac{3}{q} - 5 \pm \surd \left(\frac{3}{q} - 5\right)^2 - 9\right)$ giebt.

3) Damit dieser Werth nicht imaginär sey, muß $\frac{3}{q} - 5$ positiv und größer als 3 seyn. Dies sind Bedingungen, welche überhaupt statt finden müssen, wenn die obere Gleichung $P = 0$ möglich seyn soll, wovon wir nachher weiter reden werden.

4) Dies vorausgesetzt, hat die Gleichung (2) vier reelle Wurzeln, nemlich zwey positive und zwey ihnen gleiche negative.

5) Da Π auch als Function von μ^2 anzusehen ist (1), so hat es für gleiche entgegengesetzte μ einerley Werth, folglich ist die Kurve auf der Seite der negativen Abscissen ganz so gestaltet als auf der Seite der positiven, und was also von letzterer gilt, kommt auch ersterer zu.



6) Es sey A der Anfangspunct der Abscissen, so kann rechter Hand die Axe von der Kurve nur in zweyen Puncten N und R geschnitten werden (4).

Die linke Seite betrachten wir jetzt nicht, weil alles da so sich verhält wie auf der rechten (5).

7) Die Größe $P = \int \Pi d\mu$ drückt den Raum aus, den die Kurve mit der Axe einschließt. Da derselbe für den Anfangspunct A = o ist, so kann er nur erst dann wieder zu o werden, nachdem die Kurve die Axe geschnitten hat: denn es muß durch das Fortwachsen von μ erst wieder ein entgegengesetztes Stück entstehen, welches das erstere AMN, nachdem es ihm an Größe gleich geworden ist, aufhebt.

8) Für ein unendlich abnehmendes μ ist die Grenze von $\frac{\Pi}{\mu^2} = \frac{2}{3}q$, also positiv; daher fängt die Kurve mit positiven Applicaten an, und folglich ist der Raum AMN bis zum ersten Durchschnittspuncte positiv.

9) Es sey NOS das ihm gleiche negative Stück, so fängt der Raum von S an negativ zu werden, wofern die Kurve noch weiter unterhalb der Axe fortläuft, und nachdem sie die Axe zum zweytenmale in R geschnitten hat, wird wieder ein positives Stück RTV für irgend eine Abscisse AV entstehen, welches dem rückständigen negativen SOR gleich ist, und sich damit hebt. Hier wird also zum zweytenmale der Raum = o.

10) Dieser Fall kann bey Fortsetzung der Kurve nie wieder eintreten, weil von R an die Kurve über der Axe ins Unendliche fortläuft (6). Also kann der Raum nur zweymal verschwinden, oder P nur für zwey positive μ, = 0 werden.

11) Dies geschieht auch auf der andern Seite von A für eben diese μ, negativ genommen. Da aber negative μ eben das Axenverhältniß $1 : \sqrt{(1+\mu^2)}$ geben, als gleich große positive, so fallen letztere beyden μ aus unserer Betrachtung weg.

12) Es sind also für eine Rotation von gegebener Geschwindigkeit allemal zwey, aber nie mehr elliptische Figuren des flüssigen Körpers möglich, wobey das Gleichgewicht der Theile statt finden kann.

Anmerkung. Die Bemerkung, daß mehrere Abplattungen Einer Umdrehungszeit entsprechen können, hat d'Alembert zuerst gemacht; er hat aber nicht gezeigt, daß deren nur zwey möglich sind.

§. 68.

Wenn man q als sehr klein annimmt, so kann man die Gleichung P = 0 durch zwey Annahmen erfüllen, nemlich durch einen sehr geringen Werth für μ, und einen sehr großen. In beyden Fällen ist μ^2 durch eine nach den Potenzen von q fortgehende Reihe gegeben. Um die Möglichkeit dieses

letztern Falles einzusehen, setze man in der Formel $\frac{9\mu + 2\mu^3 q}{9 + 3\mu^2}$ — arc tang μ, μ sehr groß, so wird derselbe beynahe $\frac{2\mu q}{3}$ — arc tang μ, oder $\frac{2\mu q}{3}$ — $\frac{1}{2}\pi$, weil μ, als Tangente betrachtet, zu einem Winkel gehört, der wenig von 90° abweicht. Daß nun $\frac{2\mu q}{3} - \frac{1}{2}\pi = 0$ werden könne, davon sieht man die Möglichkeit ein, weil $\frac{1}{2}\pi$ allerdings das Product einer sehr großen Größe in eine sehr geringe seyn kann.

§. 68.

Um aber die Gestalt dieser Reihe für das sehr große μ zu finden, setze man arc tang $\mu = \frac{1}{2}\pi - \omega$, so wird tang $(\frac{1}{2}\pi - \omega) = \cot \omega = \mu$, und tang $\omega = \frac{1}{\mu}$, also $\omega = \frac{1}{\mu} - \frac{1}{3\mu^3} + \frac{1}{5\mu^5} - \ldots$,

$$\text{folglich arc tang } \mu = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{\mu}$$

$+ \frac{1}{3\mu^2} - \frac{1}{5\mu^5} + \ldots$, und daher $\frac{9\mu + 2q\mu^3}{3}$ $=$ arc tang $\mu \times (3 + \mu^2) = \frac{1}{2}\pi\mu^2 - \mu + \frac{3}{2}\pi$ $- \frac{8}{3\mu} + \frac{4}{5\mu^3} - \frac{16}{35\mu^5} \ldots$, oder:

$$0 = \frac{2}{3}q\mu^3 - \frac{1}{2}\pi\mu^2 + 4\mu - \frac{3}{2}\pi + \frac{8}{3\mu}$$

$- \frac{4}{5\mu^3} + $ u. s. f.

Man nehme jetzt folgende Reihe für μ an:

$$\mu = \frac{\alpha}{q} + \beta + \gamma q + \delta q^2 + \ldots, \text{ so hat man}$$

$$\mu^2 = \frac{\alpha^2}{q^2} + \frac{2\alpha\beta}{q} + \beta^2 + 2\alpha\gamma + 2\alpha\delta q \ldots$$

$$\mu^3 = \frac{\alpha^3}{q^3} + \frac{3\alpha^2\beta}{q^2} + \frac{3\alpha^2\gamma + 3\alpha\beta^2}{q} + \beta^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{q}{\alpha} - \frac{\beta q^2}{\alpha^2} \ldots,$$ woraus man durch Substitution erhält:

$$\begin{aligned} o = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{\alpha^3}{q^2} &+ \frac{2\alpha^2\beta}{q} + 2\alpha^2\gamma + 2\alpha\beta^2 + \frac{2\beta^3 q}{3} \\ &- \frac{\pi\alpha^2}{2q^2} - \frac{\pi\alpha\beta}{q} - \tfrac{1}{2}\pi(\beta^2 + 2\alpha\gamma) - \pi\alpha\delta q \ldots \\ &+ \frac{4\alpha}{q} + 4\beta \quad . \quad + 4\gamma q + \\ &+ \tfrac{3}{2}\pi \quad - \frac{8q}{3\alpha} + \end{aligned}$$

u. s. f.

welche durch q^2 multiplicirt, folgende Form bekommt:

$$o = (\tfrac{2}{3}\alpha^3 - \tfrac{1}{2}\pi\alpha^2) + (2\alpha^2\beta - \pi\alpha\beta + 4\alpha)\, q + (2\alpha^2\gamma + 2\alpha\beta^2 - \tfrac{1}{2}\pi(\beta^2 + 2\alpha\gamma) + 4\beta + \tfrac{3}{2}\pi)\, q^2 + \ldots$$

Diese Gleichung gilt für jeden sehr kleinen Werth von q, folglich auch für $q = o$, also ist jeder der Coefficienten an sich $= o$, mithin $\frac{2}{3}\alpha^3 = \frac{1}{2}\pi\alpha^2$, $\alpha = \frac{3}{4}\pi$; $2\alpha^2\beta + 4\alpha = \pi\alpha\beta$, oder $2\alpha\beta + 4 = \pi\beta$, $\frac{1}{2}\pi\beta + 4 = o$, β

$= - \frac{8}{\pi}$; und eben so findet man $\gamma = \frac{4}{\pi}$ $\left(1 - \frac{64}{3\pi^2}\right)$. Dadurch wird also die Reihe für

$\mu : u = \frac{3\pi}{4q} - \frac{8}{\pi} + \frac{4q}{\pi}\left(1 - \frac{64}{3\pi^2}\right) +$, oder in Zahlen ausgedrückt: $\mu = 2{,}356195 \cdot \frac{1}{q}$ $- 2{,}546479 - 1{,}478885 \cdot q + \ldots$

Für unsere Erde hatten wir vorhin $q = 0{,}0034494\,14$ gefunden, wodurch dies μ hier $= 680{,}519$ wird. So könnte also auch bey der Umdrehungsgeschwindigkeit unserer Erde und ihrer Dichte das Verhältniß der Axen wie 1 : 680 seyn, ohne daß die Theile aus ihrem Gleichgewichte kämen, wenn sie flüssig wären.

§. 69.

Die Umdrehungsgeschwindigkeit des flüssigen Körpers, oder der Werth von q hat eine Grenze, über welche hinaus eine elliptische Form mit dem Gleichgewichte seiner Theile nicht mehr bestehen kann.

Der negative Raum NOR muß nemlich wenigstens dem positiven gleich werden können, wenn P einmal verschwinden soll. Der Werth von q, für welchen die entgegengesetzten Räume AMN und NOR gerade einander gleich sind, ist also gedachte

Grenze, und solcher Grenzen giebt es nur Eine. Um dies einzusehen, bringe man den Ausdruck P unter folgende Form:

$$P = 6q \int \frac{\mu^2 d\mu (\mu^4 + 10\mu^2 + 9)}{(9 + 3\mu^2)^2 (1 + \mu^2)}$$

$$- 36 \int \frac{\mu^4 d\mu}{(9 + 3\mu^2)^2 (1 + \mu^2)}.$$

Wir haben oben gesehen, daß $\frac{3}{q} - 5$ positiv und größer als 3 seyn muß, wenn die Axe von der Kurve soll geschnitten werden, woraus erhellet, daß q wenigstens $< \frac{3}{8}$ seyn müsse. Aber diese Einschränkung ist noch nicht hinlänglich; es kann die Kurve von der Axe geschnitten werden, und doch der Fall unmöglich seyn, daß $P = 0$ werde. Wenn nemlich q so groß angenommen wird, daß der negative Raum oder das Integral, von

$$\mu = \sqrt{\left[\frac{3}{q} - 5 - \sqrt{\left(\left(\frac{3}{q} - 5\right)^2 - 9\right)}\right]}$$

bis $\sqrt{\left[\frac{3}{q} - 5 + \sqrt{\left(\left(\frac{3}{q} - 5\right)^2 - 9\right)}\right]}$

genommen, kleiner ist als der positive, so kann P dennoch nicht $= 0$ werden.

Wenn man in jenem Ausdrucke q so annimmt, daß er für ein zugehöriges $\mu = 0$ wird (wir betrachten hier μ von q abhängig), oder der negative Theil des Integrals dem positiven gleich wird, so wird, da μ mit q wächst, für ein größeres q alle-

mal der positive Theil größer bleiben als der negative, und folglich kann alsdann P nie wieder = o werden.

§. 70.

Aufgabe. Die Grenze von q zu bestimmen, wobey das Gleichgewicht aufhört mit einer elliptischen Form des Körpers bestehen zu können.

Auflösung. 1) In diesem Falle wird für $\Pi = 0$, auch $P = 0$; es soll nemlich beym zweyten Durchschnittspuncte $P = 0$ werden (69); man hat daher zwey Gleichungen zwischen μ und q, und zwar

$$\mu^4 q + (10 q - 6)\mu^2 + 9q = 0 \text{ und}$$

$$\frac{9\mu + 2q\mu^3}{9 + 3\mu^2} - \text{arc tang}\,\mu = 0.$$

2) Erstere läßt sich auch so darstellen: $(\mu^4 + 10\mu^2 + 9)\,q = b\mu^2$, woraus $q = \frac{b\mu^2}{1 + \mu^2(9 + \mu^2)}$ wird; dieser Werth von q in die zweyte Gleichung substituirt, giebt: $0 = \frac{7\mu^5 + 30\mu^3 + 27\mu}{(1+\mu^2)(3 + \mu^2)(9+\mu^2)}$ — arc tang μ, woraus man $\mu = 2{,}5292$ erhält, welches $q = 0{,}337007$ und $\sqrt{(1 + \mu^2)} = 2{,}7197$ giebt.

§. 71.

Man nehme einen Weltkörper an, bey dem q diesen Werth hätte, den wir jetzt mit q′ bezeichnen

wollen, und setze dieses seine Dichte $= \varrho'$, seine Umdrehungszeit $= t$. Bey der Erde mögen q, ϱ und T eben diese Stücke bedeuten, so ist für diese $q = \frac{3g}{4\pi\varrho}$, für jenen Körper $q' = \frac{3g'}{4\pi\varrho'}$, oder $g' = \frac{4\pi\varrho' q'}{3}$. Da nun g dem Quadrate der Umlaufszeit umgekehrt proportional ist, so ist $g : g'$

$$= t^2 : T^2, \text{ also } g' = \frac{gT^2}{t^2}, \text{ und folglich}$$

$$t^2 = \frac{3gT^2}{4\pi\varrho' q'} = \frac{4\pi\varrho T^2 q}{4\pi\varrho' q'} = T^2 \cdot \frac{q\varrho}{q'\varrho'}, \text{ und}$$

$$t = \sqrt{\left(\frac{q}{q'}\right)} \cdot \sqrt{\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)} \cdot T.$$

Setzt man also für q und q' ihre Werthe, jenen aus §. 62 diesen aus §. 70, so wird $t = 2^h 25' 17'' \sqrt{\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)}$.

Man setze noch $\varrho = \varrho'$, so folgt:
daß eine flüssige Masse, die mit der Erde einerley Dichte hätte, nicht mehr eine elliptische Form behaupten könne, wenn ihre Rotationszeit kleiner als $2^h 25' 17''$ ist.

Wäre dagegen ϱ' kleiner als ϱ, so hörte die Möglichkeit bey noch langsamerer Umdrehung auf, z. B. bey der Sonne für die ϱ' ungefähr $\frac{1}{4}\varrho$ ist, schon dann, wenn die Umdrehungszeit $< 9^h 40'$ wäre.

§. 72.

Ein Fluidum würde sich also in solchem Falle nach mechanischen Gesetzen zerstreuen. Allein wenn wir annehmen, daß zwischen ihren Theilen (wie das bey allen uns bekannten flüssigen Materien der Fall ist) eine Cohäsion statt finde, so ist es einzusehen, daß diese Cohäsion die Absonderung der Theile verhindern, und in beständige Oscillationen verwandeln werde; daß sich aber zugleich auch durch diesen Widerstand, von Seiten der Cohäsion, die Winkelgeschwindigkeit der Masse nach und nach vermindern müsse, und daß nach einer großen Anzahl von Oscillationen die Umdrehung endlich bey einer Grenze von Geschwindigkeit, für welche das Gleichgewicht statt haben kann, beharren, und das Fluidum eine elliptische Form annehmen werde, die dieser Rotation entspricht. Die Bestimmung dieser allmähligen Aenderungen in der Umdrehungsgeschwindigkeit und der Grenze, worauf sie zuletzt kommt, scheint, wegen der partiellen Bewegung der einzelnen Theile, großen Schwierigkeiten unterworfen zu seyn; allein man hat in der Mechanik der Fälle sehr viele, wo das End-Resultat der Wirkung von Kräften, die sich am Ende ins Gleichgewicht setzen, bestimmbar ist; ohne daß man im Stande wäre, den allmähligen Uebergang zu demselben durch ein Gesetz angeben zu können, und dieser Fall findet auch hier statt.

§. 73.

Man hat in der Mechanik ein Gesetz, das folgendermaaßen lautet:

Wenn ein System von Körpern sich um eine Axe drehet, und man eine Ebene auf diese senkrecht setzt, so ist die Summe aller der Producte aus den einzelnen Massen dieser Körper in die Sectoren, welche die auf diese Fläche projicirten Radien, die von den Körpern zur Axe laufen, von einer willkührlichen fixen Linie an, beschreiben, der Zeit proportional, die Körper mögen auf einander würken wie sie wollen.

Von diesem Gesetze, das sich eigentlich noch weiter ausdehnen läßt, hat Hr. de la Grange in seiner Theorie der Functionen einen sehr einfachen und lichtvollen Beweis gegeben. Es läßt sich von ihm hier folgende Anwendung machen:

1) Man substituire den einzelnen Massen die Elemente des flüssigen Körpers, und nehme an, daß diese in jedem Zeittheile dt sich in Bezug auf die Axe um denselben Winkel $d\varphi$ drehen, so wird, wenn dM, dM' u. s. f. die Elemente, r, r' u. s. f., ihre Entfernungen von der Axe heißen:

$$dM \int \frac{r^2 d\varphi}{2} + dM' \int \frac{r'^2 d\varphi}{2} + dM'' \int \frac{r''^2 d\varphi}{2}$$

$= \frac{1}{2} Ct$, und für den gegenwärtigen Augenblick:

$$dM \cdot \frac{r^2 d\phi}{2} + dM' \cdot \frac{r'^2 d\phi}{2} + \ldots = \tfrac{1}{2} C dt$$

$= \tfrac{1}{2} d\phi \int r^2 dM$, folglich $C = \frac{d\phi}{dt} \int r^2 dM$ d. h. der Körper mag während der Umwälzung eine Form annehmen, welche er will, so hat doch, in einem Zeitmomente wie im andern, das Product aus seiner Winkelgeschwindigkeit in das auf die Umdrehungs-Axe sich beziehende Moment der Trägheit des ganzen Körpers stets einerley Größe.

2) Unter dieser Gestalt nennt man den Satz auch wol das Princip der Erhaltung der Momente, und zwar wegen folgender Betrachtung, die vielleicht auch dazu dienen wird, die Sache, so viel es sich hier thun läßt, zu erläutern:

3) Die anfängliche Bewegung muß von einer Kraft herrühren, deren Moment gegen die Axe wir Ve nennen wollen; die dadurch zu Anfange bewürkte Geschwindigkeit heiße $\frac{d\gamma}{dt}$, das Moment der Trägheit Mh^2, so ist bekanntlich $\frac{d\gamma}{f dt} = \frac{Ve}{Mh^2}$, also $Ve = \frac{Mh^2 d\gamma}{f dt}$. Verändert nun der Körper durch die Umwälzung seine Form, ohne daß neue Kräfte auf ihn würken, und heißt für einen Augenblick der Bewegung Mu^2 sein Moment der Träg-

heit; $\frac{d\gamma}{dt}$ seine Winkelgeschwindigkeit, so muß noch wie anfangs $Ve = \frac{Mu^2 d\gamma}{fdt}$, also $\frac{Mu^2 d\gamma}{fdt}$, oder auch $\frac{d\gamma}{dt} \cdot Mu^2$ eine unveränderliche Größe seyn.

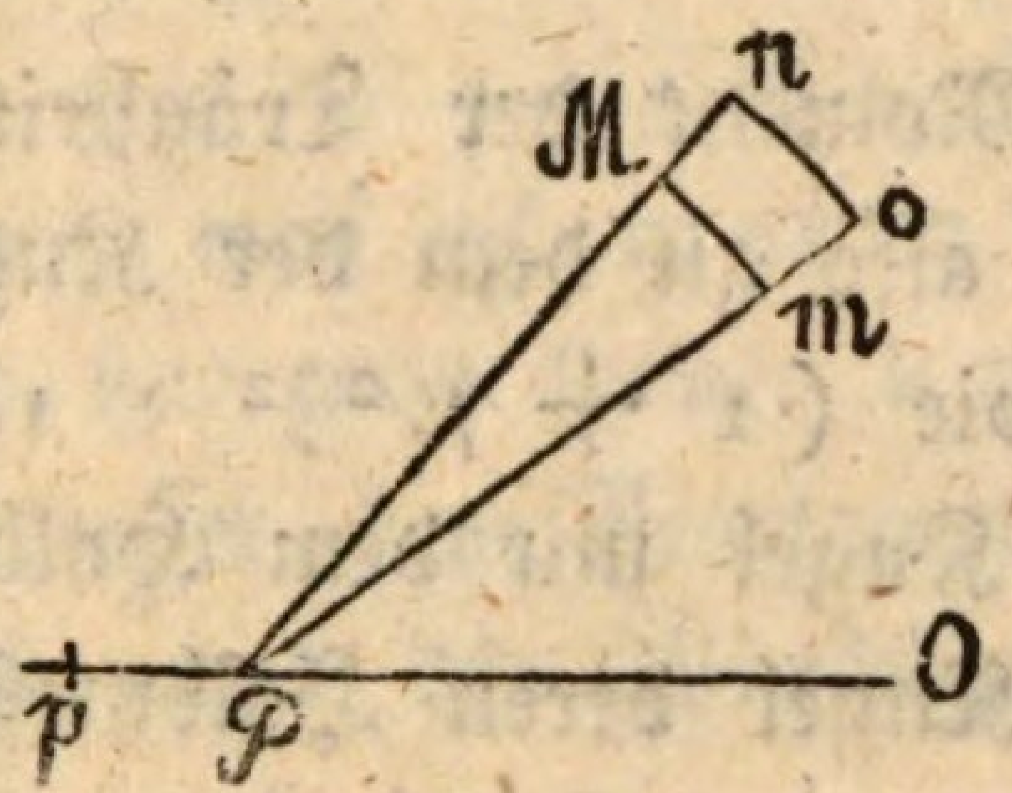
§. 74.

Aufgabe. Eine flüssige Kugel, deren Halbmesser $= 1$ sey, bekomme plötzlich eine drehende Bewegung um eine ihrer durch den Mittelpunct gehenden Axen, welche schneller ist, als das Gleichgewicht ihrer Theile es erfordert. Man fragt, bey welcher Winkelgeschwindigkeit die Rotation zuletzt beharren müsse, und welches die Form der Masse seyn werde, welche sie zuletzt, dieser Geschwindigkeit gemäß, annimmt.

Auflösung. 1) Es sey die anfängliche Geschwindigkeit des Körpers γ', die, welche er am Ende behält, γ; die Form die dieser entspricht, sey ein elliptisches Sphäroid, dessen halbe Polar-Axe $= k$, Halbmesser des Aequators $= k\sqrt{(1 + \mu^2)}$ sey.

2) Um das Moment der Trägheit dieses Sphäroides in Bezug auf die Umdrehungs-Axe zu bestimmen, denke man sich durch eben diese Axe eine Kugel mit eben dem Halbmesser k gelegt; so sind die auf die Axe senkrechten Schnitte beyder Körper, Kreise,

Kreise, und der Halbmesser des sphäroidischen Schnittes durch P, ist zu dem des Kugelschnittes durch eben diesen Punct, wie $\sqrt{(1 + \mu^2)} : 1$, welches Verhältniß also auch die Bogen Mm des Sectors für einerley Winkel MPm in beyden Schnitten haben.



3) Es sey in der Kugel $OP = x$, der Halbmesser des Schnittes $= y$, ein willkührliches Stück desselben $PM = u$, $Mn = du$, $Mm = ds$, so ist das Element $Mnom = duds$, und dies mit der Dicke $Pp = dx$ multiplicirt, giebt für das körperliche Element: $dudsdx$, woraus das Moment der Trägheit $= \int u^2 dudsdx = \int u^3 dudxd\varphi$ wird, wenn wir $MPm = d\varphi$ setzen. Nimmt man nun im sphäroidischen Schnitte u' dem u proportional an, so ist $u' = u\sqrt{(1 + \mu^2)}$, also $du' = du\sqrt{(1 + \mu^2)}$, folglich das Moment der Trägheit des Sphäroides $= \int u'^3 du' dxd\varphi$ $= (1 + \mu^2)^2 \int u^3 dudxd\varphi$, welches nach u integrirt, und alsdann $u = y$ gesetzt, $= (1 + \mu^2)^2$ $\int \frac{1}{4} y^4 dxd\varphi$ wird.

4) Dies nach φ integrirt, und nachher $\varphi = 2\pi$ gesetzt, giebt ferner $\frac{1}{2}\pi(1 + \mu^2)^2 \int y^4 dx$, das

sich, weil $y^2 = k^2 - x^2$ ist, in $\frac{1}{2}\pi(1+\mu^2)^2 \int(k^2-x^2)^2 dx$ verwandelt, woraus bey der letztern Integrirung, nachdem $x = k$ gesetzt ist, ein Ausdruck $(1+\mu^2)^2 K$ entsteht, wo K bloß k und zwar in der fünften Potenz enthält, und das Moment der Trägheit für die Kugel ausdrückt.

5) Das Moment der Trägheit des Sphäroides verhält sich also zu dem der Kugel, deren Halbmesser k ist, wie $(1+\mu^2)^2 : 1$. Nennt man daher das der Kugel mit dem Halbmesser $1 = I$, so ist das der Kugel deren Halbmesser k ist $= K = Ik^5$, und das des Sphäroides $= Ik^5(1+\mu^2)^2$, folglich ist (73) $I\gamma' = Ik^5(1+\mu^2)^2 . \gamma$ oder $\gamma' = k^5(1+\mu^2)^2 . \gamma$.

6) Weil die Masse nichts verloren hat, so ist $\frac{4}{3}\pi k^3(1+\mu^2) = \frac{4}{3}\pi$, folglich $k = (1+\mu^2)^{-\frac{1}{3}}$, also $\gamma' = (1+\mu^2)^{-\frac{5}{3}} . (1+\mu^2)\gamma = (1+\mu^2)^{\frac{1}{3}} . \gamma$ und $\gamma = \frac{\gamma'}{\sqrt[3]{(1+\mu^2)}}$, welches die Winkelgeschwindigkeit bestimmt, so bald als μ bekannt seyn wird.

7) Es mögen g' und g die Schwungkräfte bey der Sphäre und dem Sphäroid in der Entfernung 1 von der Axe bedeuten, so ist $g : g' = \gamma^2 : \gamma'^2$ (55), oder $g = \frac{g'\gamma^2}{\gamma'^2} = \frac{g'}{(1+\mu^2)^{\frac{2}{3}}}$, und heißt

wie oben der Quotient $\frac{3g}{4\pi\varrho}$, q, und $\frac{3g'}{4\pi\varrho}$, q', so hat man $q : q' = g : g'$ und $q = \frac{q'}{(1+\mu^2)^{\frac{2}{3}}}$.

8) Wenn man diesen Werth von q in die oben zwischen μ und q gefundene Gleichung setzt, so erhält man $o = 9\mu + 2q'\mu^3(1+\mu^2)^{-\frac{2}{3}}$ — arc tang μ, woraus, weil q' gegeben ist, μ gefunden wird. Daraus hat man ferner $k = (1+\mu^2)^{-\frac{1}{3}}$, und den Halbmesser des Aequators $k(1+\mu^2)^{\frac{1}{2}} = (1+\mu^2)^{\frac{1}{6}}$, und die Winkelgeschwindigkeit bestimmt sich aus n. 6.

§. 75.

Es sey $\frac{9\mu + 2q'\mu^3(1+\mu^2)^{-\frac{2}{3}}}{9+3\mu^2}$ — arc tang $\mu = \Omega$, so ist die Grenze von $\frac{\Omega}{\mu}$ für ein unendlich abnehmendes μ, $= \frac{\mu - \text{arc tang}\,\mu}{\mu}$ $= 1 - \frac{\text{arc tang}\,\mu}{\mu}$, also positiv, weil die Tangente jederzeit größer ist, als ihr Bogen; folglich kann man μ immer so klein annehmen, daß $\frac{\Omega}{\mu}$, und folglich auch Ω, positiv wird. Wächst dagegen μ unendlich, so ist die Grenze von Ω, $2q' \cdot \mu^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}\pi = -\frac{1}{2}\pi$, und man kann also μ jederzeit so groß

annehmen, daß Ω negativ wird; folglich muß Ω für irgend einen Werth von μ, der zwischen 0 und ∞ liegt, $= 0$ werden. Da dies unabhängig von q' gilt, so folgt: daß, wie groß auch q', oder die anfängliche Winkelgeschwindigkeit der Kugel seyn mag, doch immer eine elliptische Form statt finde, bey der die Masse sich zuletzt ins Gleichgewicht setzen kann. Uebrigens sieht man leicht, daß die Auflösung mit geringer Abänderung auch auf den Fall anzuwenden sey, wenn die flüssige Masse anfangs irgend eine andere Gestalt hat; sie hat nemlich alsdann ein anderes Moment der Trägheit.

§. 76.

Um keine Lücke in dieser Theorie übrig zu lassen, bleibt noch die Frage zu beantworten übrig, ob es gedenkbar sey, daß ein flüssiger Körper, durch stete Umdrehung um eine feste Axe, die Gestalt eines gegen die Pole zu länglichten Sphäroides annehmen könne: denn obgleich die Unmöglichkeit dieses Falles vorauszusehen ist, so ist es doch gut, sich durch die Theorie davon völlig zu überzeugen.

1) Es sey also die halbe Polar-Axe eines solchen Sphäroids $= k$, der Halbmesser des Aequators $= k\sqrt{(1+\mu^2)}$, wie oben, so ist der Annahme zufolge $\sqrt{(1+\mu^2)} < 1$, also μ^2 negativ.

Man setze daher $\mu^2 = -\mu'^2$, so wird (67, 1)

$$\Pi = \frac{-6\mu'^2(q\mu'^4 - (10q-6)\mu'^2 + 9q)}{(1-\mu'^2)(9-3\mu'^2)^2} \text{ und}$$

man hat also für $\Pi = 0$ die Gleichung $0 = q\mu'^4 - (10q - 6)\mu'^2 + 9q = (1 - \mu'^2)(9 - \mu'^2)q + 6\mu'^2$.

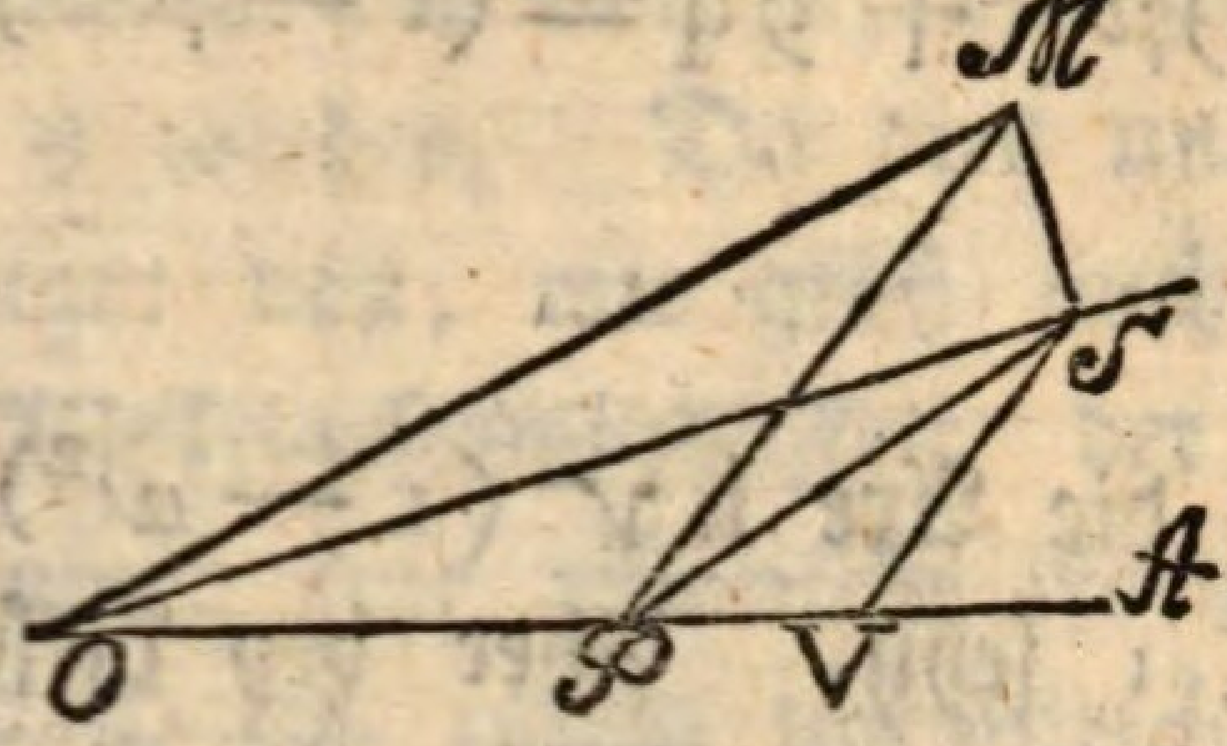
2) Soll die Axe $k\sqrt{(1 - \mu'^2)}$ möglich seyn, so muß $\mu' < 1$ seyn. Aber bey dieser Bedingung ist der Ausdruck $(1 - \mu'^2)(9 - \mu'^2)q + 6\mu'^2$ allemal positiv, und die Gleichung kann nicht erfüllt werden d. h., für kleinere μ' als 1 giebt es keinen Durchschnitt der Kurve mit der Abscissenlinie.

3) Also auch keine Theile derselben auf entgegengesetzten Seiten der Axe, sondern die Kurve läuft auf einer Seite fort, und der Raum zwischen ihr und der Axe wächst mit μ' continuirlich; daher kann P nie $= 0$ werden, oder es giebt kein $-\mu^2$, welches der Gleichung $P = 0$ Gnüge leistete.

Gestalt des flüssigen Körpers auf den zugleich Kräfte von aussen würken.

§. 77.

Aufgabe. Ein elliptisches Sphöroid drehe sich um eine gegebene Axe, die mit keiner der Hauptaxen zusammenfällt; die Kräfte zu bestimmen, welche aus der Schwungkraft eines seiner Elemente nach den Richtungen der Hauptaxen entspringen.



Auflösung. 1) Es seyen x, y und z die Coordinaten des Punctes M für die drey Hauptaxen, deren erstere OA seyn mag, worauf die andern beyden die nicht angezeigt sind, senkrecht stehen; ferner x', y', z' die Coordinaten desselben Punctes in Bezug auf die Rotations-Axe OS, und die auf ihr senkrechten, so ist klar, daß die Gleichungen zwischen den Coordinaten beyder Art folgende Form haben werden: $x = px' + qy' + rz'$, $y = p'x' + q'y' + r'z'$, $z = p''x' + q''y' + r''z'$; es entstehen nemlich allemal die einen aus den andern durch Zusammensetzung von Linien, welche letztere vermittelst Winkel bestimmt werden, die die gegebene Lage der Axen beyder Art hervorbringt, so daß die Coefficienten p, q u. s. f. Ausdrücke von Sinussen und Cosinussen dieser Winkel werden.

2) Diese angenommenen Coefficienten haben eine nothwendige Beziehung unter einander: denn da die Rotations-Axe durch den Schwerpunct geht, und x' auch von diesem Puncte angerechnet wird, so erhält man $MO^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, also, nachdem man für x, y und z die Werthe substituirt hat:

$x'^2 + y'^2 + z'^2 = (p^2 + p'^2 + p''^2) x'^2 + 2(pq + p'q' + p''q'') x'y' + (q^2 + q'^2 + q''^2) y'^2 + 2(pr + p'r' + p''r'') x'z' + 2(qr + q'r' + q''r'') y'z' + (r^2 + r'^2 + r''^2) z'^2$, folglich wird: $p^2 + p'^2 + p''^2 = 1 = q^2 + q'^2 + q''^2 = r^2 + r'^2 + r''^2$ und $pq + p'q' + p''q'' = 0 = pr + p'r' + p''r'' = qr + q'r' + q''r''$.

3) Gegenseitig sey $x' = fx + gy + hz$, so bekommt man, wenn für x, y, z ihre Werthe gesetzt werden:

$x' = (fp + gp' + hp'') x' + (fq + gq' + hq'') y' + (fr + gr' + hr'') z'$ also wird:

$$fp + gp' + hp'' = 1 = p^2 + p'^2 + p''^2$$
$$fq + fq' + hq'' = 0 = pq + p'q' + p''q''$$
$$fr + gr' + hr'' = 0 = pr + p'r' + p''r''$$, welche Gleichungen auf folgende Form gebracht werden können:

$$(f - p) p + (g - p') p' + (h - p'') p'' = 0$$
$$(f - p) q + (g - p') q' + (h - p'') q'' = 0$$
$$(f - p) r + (g - p') r' + (h - p'') r'' = 0.$$

4) Man kann nun $f - p$ aus den beyden erstern eliminiren, woraus eine Gleichung $(g - p') \zeta + (h - p'') \vartheta = 0$ entspringt; eine Gleichung ähnlicher Art $(g - p') \zeta' + (h - p'') \vartheta' = 0$ entsteht auch aus den beyden letztern, und aus diesen beyden findet man, durch Eliminirung von $g - p'$, die Gleichung $h - p'' = 0$. Auf diese Weise geben also jene drey Gleichungen: $f - p = 0$, g

$- p' = 0$, $h - p'' = 0$ oder es ist $f = p$, $g = p'$, $h = p''$ also:

$$x' = px + p'y + p''z$$
$$y' = qx + q'y + q''z.$$
$$z' = rx + r'x + r''z.$$

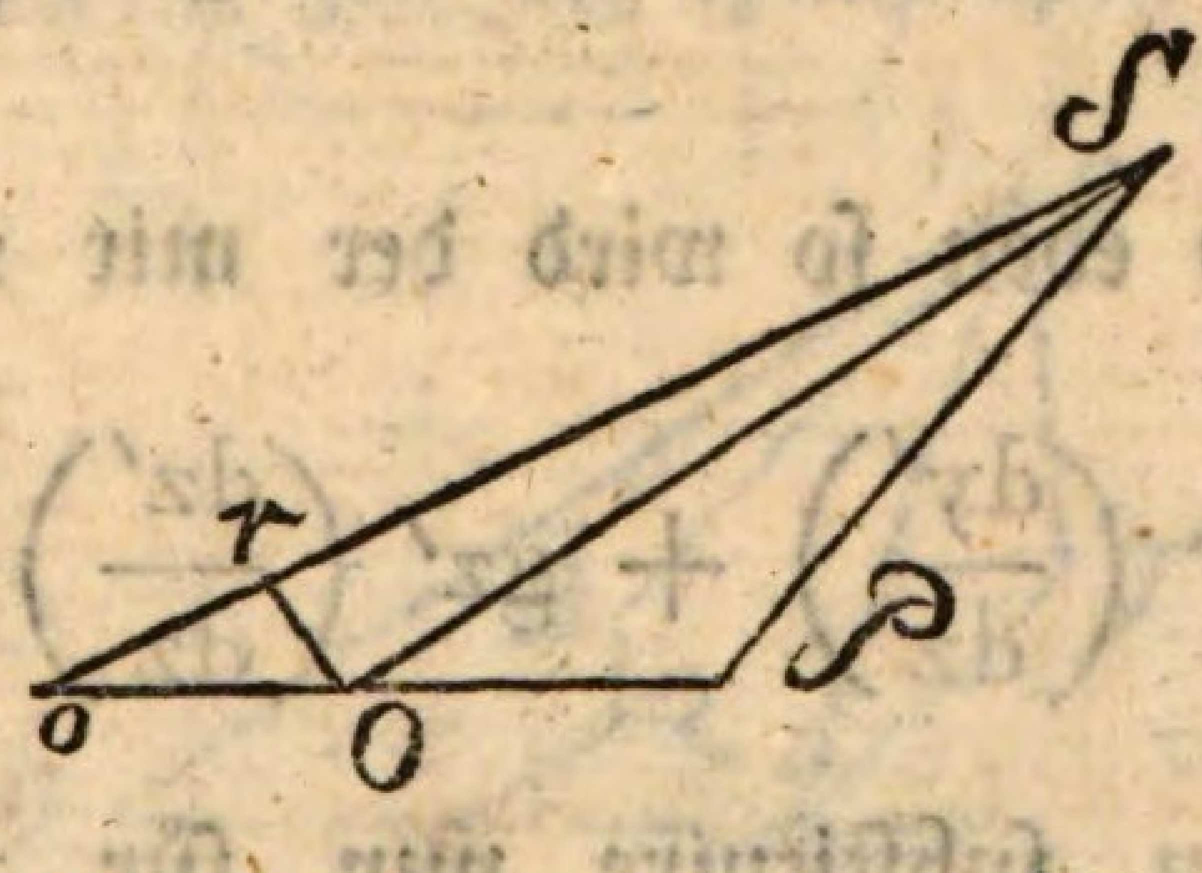
5) Man fälle aus M die Perpendikel MP und MS auf die Axen der x und x,' so ist OP = x, OS = x', und die Schwungkraft des Punctes M ist = g . MS, (wenn g die Bedeutung wie oben (55) hat) deren Richtung zugleich nach SM geht. Man zerlege diese in eine Kraft nach PM $= g \,.\, MS \,.\, \frac{MP}{MS} = g\,MP$, und in eine nach SP = g . SP; da die Richtung PM ersterer auf OP senkrecht ist, so liegt in ihr kein Antheil von Kraft, die nach PO gerichtet wäre; was also von der Schwungkraft durch Zerlegung auf PO kommen kann, muß ganz in der andern Kraft g . SP enthalten seyn. Man fälle also aus S auf AO das Perpendikel SV, und zerlege die Kraft g . SP nach den Richtungen SV und VP, so ist letztere = g . PV, der gesuchte Theil der Schwungkraft, der nach AO gerichtet ist.

6) Nun ist $\text{Cos SOP} = \left(\frac{d\,.\,OS}{d\,.\,OP}\right)$ *)

---

*) Man lasse P von O, oder, welches einerley ist, O von P in der Axe OP um Oo = dx wegrücken, so entfernt sich

$= \left(\frac{dx'}{dx}\right)$, also OV $=$ OS Cos SOP $= x' \left(\frac{dx'}{dx}\right)$, und PV $= x' \left(\frac{dx'}{dx}\right) - x$. Ferner hat man, wenn R den Radius OM bedeutet: $R^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, also $R \left(\frac{dR}{dx}\right) = x' \left(\frac{dx'}{dx}\right) + y' \left(\frac{dy'}{dx}\right) + z' \left(\frac{dz'}{dx}\right)$, und da auch $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$, so wird, wenn man gleichfalls in Bezug auf x differenziirt, $R \left(\frac{dR}{dx}\right) = x$, also $x' \left(\frac{dx'}{dx}\right) + y' \left(\frac{dy'}{dx}\right) + z' \left(\frac{dz'}{dx}\right) = x$, und



auch S von O, und zwar, wenn man den kleinen Bogen Or beschreibt, um or, welches das partielle Differenzial von SO $= x'$ in Bezug auf die Variabele x, also $= \left(\frac{dx'}{dx}\right) dx$ ist, indem x′ von x, y und z zugleich abhängt (4), und bey gegenwärtiger Aenderung, y und z dieselben geblieben sind. Im Dreyecke Oor ist nun or $=$ Oo Cos Oor $=$ Oo . Cos SOP, also Cos SOP $= \left(\frac{or}{Oo}\right) = \left(\frac{dx'}{dx}\right)$.

folglich $PV = x'\left(\frac{dx'}{dx}\right) - x = - y'\left(\frac{dy'}{dx}\right) + z'\left(\frac{dz'}{dx}\right)$, mithin die aus der Schwungkraft entstehende Kraft nach $AO = g \,.\, PV = - gy'\left(\frac{dy'}{dx}\right) - gz'\left(\frac{dz'}{dx}\right)$, und folglich eben die Kraft als nach der Richtung OA gehend betrachtet $= gy'\left(\frac{dy'}{dx}\right) + gz'\left(\frac{dz'}{dx}\right)$.

7) Nimmt man OA jetzt für die Axe der y an, indem OS wie vorhin die der x′ bleibt, so erhält man auf gleiche Weise für den Theil, welcher von der Schwungkraft auf die mit dieser parallele Richtung kommt, den Ausdruck $gy'\left(\frac{dy'}{dy}\right) + gz'\left(\frac{dz'}{dy}\right)$, und eben so wird der mit z parallele Antheil $= gy'\left(\frac{dy'}{dz}\right) + gz'\left(\frac{dz'}{dz}\right)$.

8) Man substituire nun für x′, y′, z′ die Werthe aus (4), so wird die Kraft nach der Richtung der x

$$= gq\,(qx + q'y + q''z) + gr\,(rx + r'y + r''z);$$

die zweyte nach der Richtung der y

$$= gq'\,(qx + q'y + q''z) + gr'\,(rx + r'y + r''z);$$

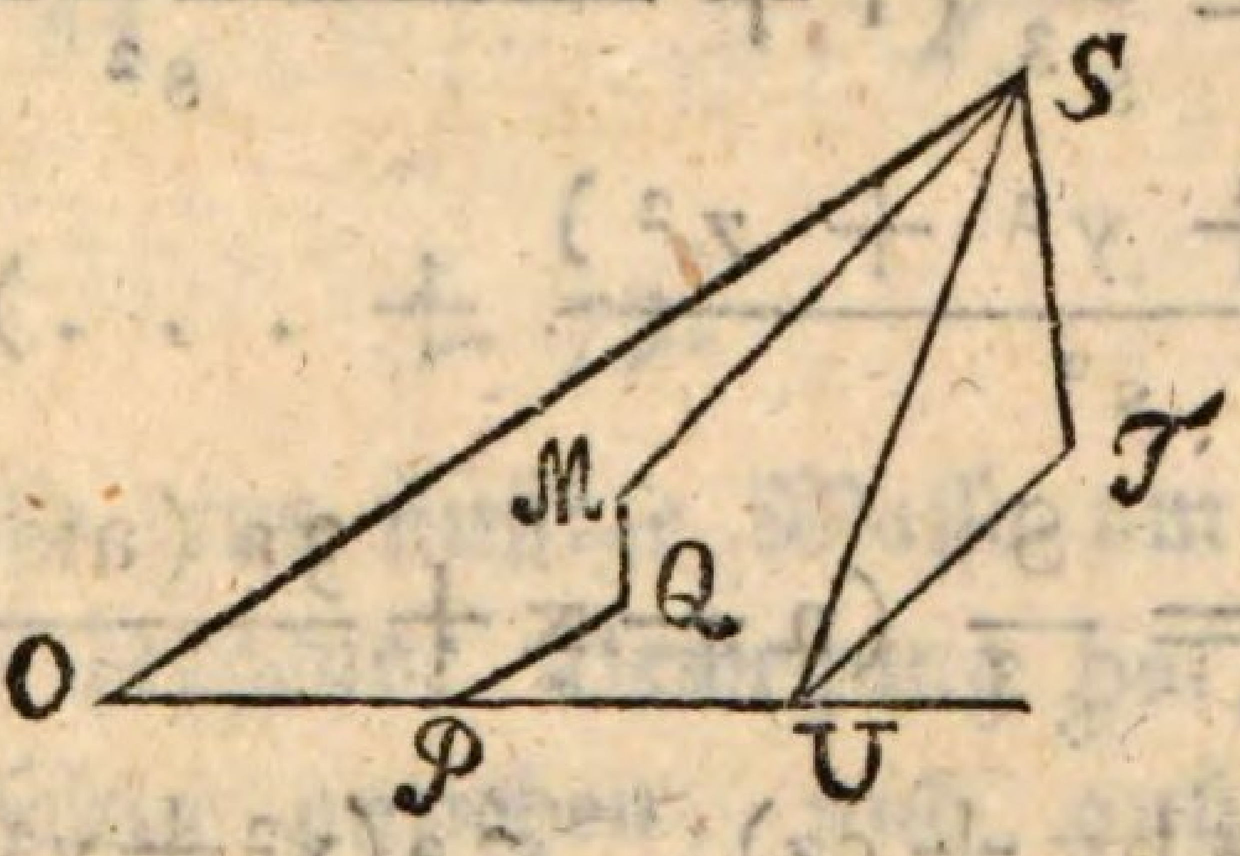
und die dritte nach der Richtung der z

$$= gq''(qx + q'y + q''z) + gr''(rx + r'y + r''z).$$

§. 78.

Aufgabe. Auf die flüssige Masse würke ein entlegener Körper durch Anziehung, man sucht die Kräfte, womit ein Element derselben bey M nach ihren drey Hauptaxen sollicitirt wird.

Auflösung. 1) Es sey S die Masse dieses Körpers, welcher auf das Fluidum würkt, α, β, γ die drey Coordinaten, durch die seine Lage gegen den Mittelpunct O des flüssigen Körpers, in Bezug auf die Rotationsaxe, und die ihr zugehörigen bestimmt wird; a, b, c diese Coordinaten für die Hauptaxen, so hat man vorläufig $a = p\alpha + q\beta + r\gamma$, $b = p'\alpha + q'\beta + r'\gamma$, $c = p''\alpha + q''\beta + r''\gamma$. Sind also erstere gegeben, so können wir auch letztere als bekannt ansehen, wofern die Lage der Rotationsaxe gegen die Hauptaxen gegeben ist.



2) Man nenne ferner die Distanz OS des Körpers S vom Mittelpuncte O, f seine Distanz SM von einem Elemente M des Fluidums, so ist $s = \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$, und $f = \sqrt{[(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2]} = \sqrt{[s^2 + (x^2 + y^2 + z^2) - (2ax + 2by + 2cz)]}$.

3) Die Attraction des Körpers S gegen den Punct M ist $= \frac{S}{f^2}$, und der Theil davon nach der Richtung OP $= \frac{(a-x)}{f^3} \cdot S$, der nach der Richtung PQ $- \frac{(b-y)S}{f^3}$, und der nach QM

$$= \frac{(c-z)S}{f^3}.$$

4) Man setze $f = s\sqrt{(1-i)}$, so wird

$$i = \frac{2(ax+by+cz) - (x^2+y^2+z^2)}{s^2}, \text{ und}$$

$$\frac{S}{f^3} = \frac{S}{s^3}(1-i)^{-\frac{3}{2}} = \frac{S}{s^3}\left(1+\tfrac{3}{2}i+\tfrac{15}{8}i^2+\ldots\right),$$

oder, wenn für i sein Werth gesetzt wird:

$$\frac{S}{f^3} = \frac{S}{s^3}\left(1+\frac{3(ax+by+cz)}{s^2}\right.$$

$$\left.-\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{s^2}+\ldots\right). \text{ und daher}$$

$$\frac{(a-x)S}{f^3} = \frac{S}{s^3}\left(a-x+\frac{3a(ax+by+cz)}{s^2}\right.$$

$$\left.-\frac{3x(ax+by+cz)}{s^2}-\frac{3a(x^2+y^2+z^2)}{s^2}+\ldots\right.$$

5) Wird hiervon $\frac{Sa}{s^3}$, die Kraft abgezogen, womit der Mittelpunct O nach eben der Richtung angezogen wird, so bleibt die Kraft

$$\frac{S}{s^3}\left(\frac{3a(ax+by+cz)}{s^2}-x-\ldots\right)$$ übrig, welche das Element bey M vom Mittelpuncte nach der Richtung OP zu entfernen strebt, und da die Größen x, y, z gegen a, b, c als unbeträchtlich angenommen werden, indem vorausgesetzt wird, daß der fremde Körper sehr weit von O entfernt sey, so hat man nur die ersten beyden Glieder dieser Reihe nöthig.

6) Auf gleiche Weise bekommt man für die Kräfte, womit das Element nach den Richtungen der andern beyden Hauptaxen sollicitirt wird, folgende Werthe:

$$\frac{S}{s^3}\left(\frac{3b(ax+by+cz}{s^2}-y\right)$$ parallel mit PQ und

$$\frac{S}{s^3}\left(\frac{3c(ax+by+cz)}{s^2}-z\right)$$ parallel mit QM.

§. 79.

Wenn also eine flüssige Masse um irgend eine ihrer Axen eine drehende Bewegung hat, ihre Theile einander gegenseitig anziehen, und außerdem noch von einem weit entfernten Körper angezogen werden, so kommt zu den Kräften P, Q, R (welche alles das in sich fassen sollen, wodurch die Elemente der Flüssigkeit nach den drei Richtungen der Hauptaxen sollicitirt werden (48) noch ein Theil hinzu dessen Werth im §. 77 bestimmt ist. Sie bestehen

also im gegenwärtigen Falle aus drey besondern Stücken, und diese sind:

1) Die Kraft, womit das Element von der ganzen Masse nach den gedachten drey Richtungen angezogen wird.

2) Die Kraft, welche aus der Schwungkraft des Elements nach diesen Richtungen entsteht.

3) Die, welche der fremde Körper auf dasselbe ausübt.

Nimmt man alle diese Stücke für das elliptische Sphäroid aus §. 77 zusammen, so erhält man:

$$P = -\frac{3Mx}{k^3} . F \frac{S}{s^3}\left(3a\frac{(ax+by+cz)}{s^2} - x\right)$$

$$+ gq(qx + q'y + q''z) + gr(rx + r'y + r''z);$$

$$Q = -\frac{3My}{k^3}\left(\frac{d\mu F}{d\mu}\right) + \frac{S}{s^3}\left(3b\frac{(ax+by+cz)}{s^2} - y\right)$$

$$+ gq'(qx + q'y + q''z) + gr'(rx + r'y + r''z);$$

$$R = -\frac{3Mz}{k^3}\left(\frac{d\mu' F}{d\mu'}\right) + \frac{S}{s^3}\left(\frac{3c(ax+by+cz)}{s^2} - z\right)$$

$$+ gq''(qx + q'y + q''z) + gr''(rx + r'y + r''z).$$

§. 80.

Aufgabe. Die Bedingungen zu finden, welche es gestatten, daß unter den gegebenen Umständen der flüssige Körper bey einer elliptischen Form im Gleichgewichte sey.

Auflösung. 1) Die zum Gleichgewicht wesentliche Erforderniß ist, wie wir oben (50) gesehen

haben, daß für die Oberfläche $Pdx + Qdy + Rdz = o$ sey. Um also zu sehen ob hier die Form eines elliptischen Sphäroides möglich sey, setze man für P, Q, R, ihre Werthe aus §. 79, und ordene die Glieder nach den Variabeln x, y und z, so bekommt man:

$$o = xdx\left(\frac{3MF}{k^3} + \frac{S}{s^3}\left(1 - \frac{3a^2}{s^2}\right) - g(q^2 + r^2)\right)$$
$$+ ydy\left(\frac{3M}{k^3}\left(\frac{d\mu F}{d\mu}\right) + \frac{S}{s^3}\left(1 - \frac{3b^2}{s^2}\right)\right.$$
$$\left. - g(q'^2 + r'^2)\right)$$
$$+ zdz\left(\frac{3M}{k^3}\left(\frac{d\mu' F}{d\mu'}\right) + \frac{S}{s}\left(1 - \frac{3c^2}{s^2}\right)\right.$$
$$\left. - g(q''^2 + r''^2)\right)$$
$$-(ydx + xdy)\left(\frac{3abS}{s^5} + g(qq' + rr')\right)$$
$$-(zdx + xdz)\left(\frac{3acS}{s^5} + g(qq'' + rr'')\right)$$
$$-(zdy + ydz)\left(\frac{3bcS}{s^5} + g(q'q'' + r'r'')\right),$$

welche Gleichung wir kurz so ausdrücken wollen:

$$o = Gxdx + G'ydy + G''zdz - H(ydx + xdy) - H'(zdx + xdz)$$

$- H''(zdy + ydz)$, wo die Coefficienten kein x, y und z enthalten. Man erhält also durch Integrirung:

$$C = Gx^2 + G'y^2 + G''z^2 - 2Hxy - 2H'xz - 2H''yz,$$

eine Gleichung, die für alle Puncte der Oberfläche wahr seyn muß.

2) Für diese aber ist beym elliptischen Sphäroid auch:

$x^2 + my^2 + nz^2 = k^2$, welche Gleichung mit jener sich so vergleichen läßt: Man setze y und z $= 0$, so giebt erstere Gleichung $C = Gx^2$; zugleich aber wird aus letzterer $x = k$, also $C = Gk^2$, und

$$G = \frac{C}{k^2}$$

3) Setzt man ferner x und $z = 0$, so wird $C = G'y^2$; zugleich aber $y = \frac{k}{\sqrt{m}}$, also $mC = G'k^2$, und daher $G' = \frac{mC}{k^2}$. Auf gleiche Weise erhält man $G'' = \frac{nC}{k^2}$, wenn man y und z in beyden Gleichungen $= 0$ setzt.

4) Diese Werthe für G, G,′ G″ in der Gleichung (1) substituirt, geben: $C = \frac{C}{k^2}(x^2 + my^2 + nz^2) - 2(Hxy + H'xz + H''yz)$.

Multiplicirt man also die Gleichung (2) für die Oberfläche mit $\frac{C}{k^2}$, und subtrahirt sie von dieser; so bleibt:

$0 = 2Hxy + 2H'xz + 2H''yz$, welche nicht anders statt finden kann, als wofern $H = 0$,

H′

$H' = o$, $H'' = o$ sind; man darf nemlich nur wieder zwey und zwey der Größen x, y und $z = o$ setzen.

5) Diese Bedingung giebt also:

$$o = \frac{3\,abS}{s^5} + g(qq' + rr'),\; o = \frac{3\,acS}{s^5}$$

$$+ g(qq'' + rr''),\; o = \frac{3\,bcS}{s^5} + g(q'q'' + r'r'')$$

drey Gleichungen zwischen den Größen q, q', q'', r, r', r'', welche für das Gleichgewicht statt haben müssen.

6) Aus der obigen Bestimmuug der Größen G, G', G'' wird ferner: $\frac{G'}{G} = m$, $\frac{G''}{G} = n$, oder, statt dieser Buchstaben ihre Werthe gebraucht:

$$m = \frac{\frac{3M}{k^3}\left(\frac{d\mu F}{d\mu}\right) + \frac{S}{s^3}\left(1 - \frac{3b^2}{s^2}\right) - g(q'^2 + r'^2)}{\frac{3MF}{k^3} + \frac{S}{s^3}\left(1 - \frac{3a^2}{s^2}\right) - g(q^2 + r^2)};$$

$$n = \frac{\frac{3M}{k^3}\left(\frac{d\mu' F}{d\mu'}\right) + \frac{S}{s^3}\left(1 - \frac{3c^2}{s^2}\right) - g(q''^2 + r''^2)}{\frac{3MF}{k^3} + \frac{S}{s^3}\left(1 - \frac{3a^2}{s^2}\right) - g(q^2 + r^2)}.$$

6) Da die Masse des Fluidums als gegeben betrachtet werden muß, so hat man außer jenen beyden Gleichungen zwischen k, m und n, oder zwischen k, μ und μ', noch folgende:

$$M = \tfrac{4}{3}\frac{\varrho\pi k^3}{\sqrt{mn}} = \tfrac{4}{3}\varrho\pi k^3 \sqrt{(1+\mu^2)}.\sqrt{(1+\mu'^2)},$$

aus welchen drey Gleichungen die unbekannten Größen k, μ und μ' bestimmbar sind.

7) Weil also diese Bedingungsgleichungen erfüllt werden können, so folgt, daß eine elliptische Form der flüssigen Masse möglich sey, bey der die Theile untereinander im Gleichgewichte sind.

§. 81.

Indem der flüssige Körper sich dreht, ändert sich die Lage der beyden Axen, die zur Rotationsaxe gehören, oder die Lage der y' und z'; also ändern sich auch die Coordinaten β und γ des anziehenden Körpers S, es mag dieser ruhen oder irgend eine eigene Bewegung haben; (nur einen Fall ausgenommen der nachher betrachtet wird) folglich ändern sich auch a, b und c. Dies hat zur Folge, daß auch m und n, die von jenen abhängen, nicht beständig sind. Demnach besteht das Gleichgewicht der Theile nur für ein gegebenes Zeitmoment, und der Körper nimmt in jedem folgenden Augenblicke eine andere Form an. Diese Unbeständigkeit des Gleichgewichtes macht, daß die Auflösung der Aufgabe nur auf den Fall anzuwenden ist, wo der Körper S mit den Theilen des Fluidums eine gemeinschaftliche Bewegung um des letztern seine Rotationsaxe hat, wodurch er gegen die Elemente des flüssigen Körpers stets dieselbe Lage behält.

§. 82.

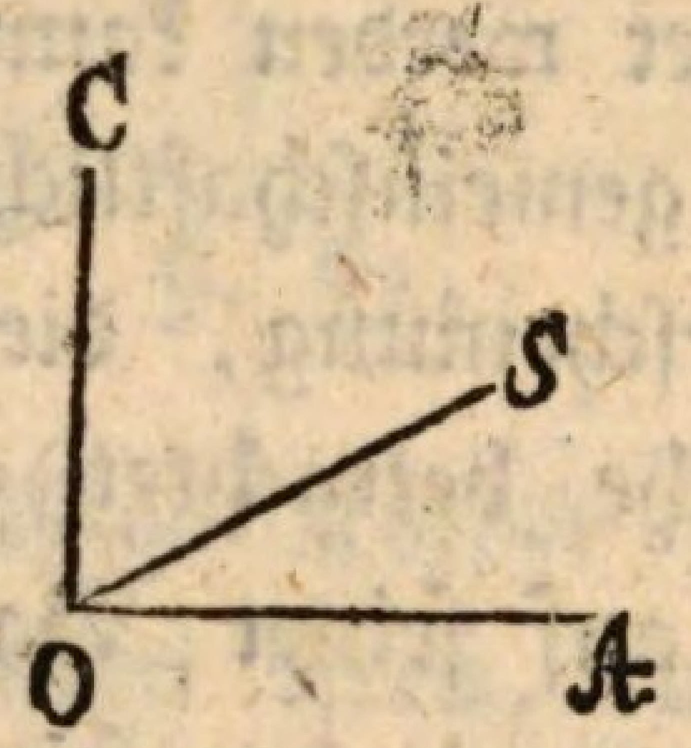
Dieser Fall findet beynahe vollkommen bey dem Monde statt, der mit seiner Rotation zugleich eine solche fortgehende Bewegung verbindet, daß er der Erde immer dieselbe Seite zukehrt, und diese also, oder vielmehr ihr Mittelpunct, stets über einerley Puncte auf des Mondes Oberfläche schwebt, folglich so betrachtet werden kann, als drehe sie sich mit dem Monde gemeinschaftlich um dessen Rotationsaxe; eine Erscheinung, die daher rührt, daß (theorisch die Sache betrachtet) seine Rotationsaxe beynahe senkrecht auf seiner Bahn steht, und die Zeit der Umdrehung mit der seines periodischen Umlaufes um die Erde genau übereinkommt. Da höchstwahrlich diese Eigenschaft allen Trabanten der übrigen Planeten zukommt, so wird die folgende Untersuchung auf diese überhaupt anwendbar.

§. 83.

Aufgabe. Die Axen des Mondes unter der Voraussetzung zu bestimmen, daß bey einem flüssigen Zustande desselben durch seine Umdrehung, und durch die gleichförmige Wirkung der Erde auf ihn, seine elliptische Gestalt sich gebildet habe.

Auflösung. 1) Die Rotationsaxe des Mondes, welche sehr nahe senkrecht auf seiner Bahn steht, ist folglich auch auf der Linie durch beyder Mittelpuncte, oder auf dem Radius Vector seiner

Bahn senkrecht. Man kann also wol annehmen, dieser Radius, der eine unveränderliche Lage im Monde hat, (stets durch denselben Punct der Mondsfläche geht) und die Rotationsaxe, seyen zwey Hauptaxen desselben; alsdann ist die dritte diejenige, die in der Ebene seiner Bahn mit dem Radius einen rechten Winkel macht.



2) Bey dieser Voraussetzung fallen die Axen der x′, y′ und z′ mit denen der x, y und z zusammen, oder wenn OA die Umdrehungsaxe des Mondes vorstellt, COS seine Bahn, S der Mittelpunct der Erde, so ist zugleich OA die Axe der x, OS die der y, und die in jener Ebene darauf senkrechte OC, die dritte Hauptaxe, oder die der z. Es ist folglich $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, also sind $p, q', r'' = 1$, und die übrigen dieser Coefficienten $= 0$ (77); außerdem ist auch noch $a = 0$, $b = s$, $c = 0$. Macht man also diese Substitutionen in §. 80, so erhält man:

$$m\left(\frac{3MF}{k^3}+\frac{S}{s^3}\right)=\frac{3M}{k^3}\left(\frac{dF\mu}{d\mu}\right)-\frac{2S}{s^3}-g;$$

$$n\left(\frac{3MF}{k^3}+\frac{S}{s^3}\right)=\frac{3M}{k^3}\left(\frac{dF\mu'}{d\mu'}\right)+\frac{S}{s^3}-g.$$

3) Da die Rotation des Mondes sehr langsam, und die Entfernung der Erde von ihm, im Verhältnisse seines Volumens, sehr groß ist, so läßt sich zum Voraus schon urtheilen, die Ungleichheiten seiner Axen werden sehr gering seyn; viel kleiner als bey der Erde, und das berechtigt, die Potenzen von μ^2 und μ'^2, so wie das Product $\mu^2 \mu'^2$ wegzulassen. Dem zu Folge wird die Masse $M = \frac{4\pi\varrho k^3}{3\sqrt{mn}}$

$$= \frac{4\pi\varrho k^3}{3} \sqrt{(1+\mu^2)} \cdot \sqrt{(1+\mu'^2)} = \frac{4\pi\varrho k^3}{3}$$

$$(1+\tfrac{1}{2}\mu^2)(1+\tfrac{1}{2}\mu'^2) = \frac{4\pi\varrho k^3}{3}$$

$$(1+\tfrac{1}{2}\mu^2+\tfrac{1}{2}\mu'^2).$$

4) Man setze diese in die erstere Gleichung, und bediene sich außerdem der (37) für F und $\left(\frac{dF\mu}{d\mu}\right)$ gefundenen Reihen $F = \frac{1}{3} - \frac{1}{10}\mu^2 - \frac{1}{10}\mu'^2$, $\left(\frac{dF\mu}{d\mu}\right) = \frac{1}{3} - \frac{3}{10}\mu^2 - \frac{1}{10}\mu'^2$,

so wird $\frac{3MF}{k^3} = 4\pi\varrho\,(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\mu^2+\frac{1}{15}\mu'^2)$, und

$$\frac{3M}{mk^3}\left(\frac{dF\mu}{d\mu}\right) = \frac{3M}{k^3}\left(\frac{dF\mu}{d\mu}\right) \cdot (1+\mu^2)$$
$$= 4\pi\varrho\,(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}\mu^2+\tfrac{1}{15}\mu'^2) \text{ also:}$$

$$4\pi\varrho\,(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{15}\mu^2+\tfrac{1}{15}\mu'^2) + \frac{S}{s^3} = 4\pi\varrho$$

$(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\mu^2 + \frac{1}{15}\mu'^2) - (1 + \mu^2)\frac{2S}{s^3} + g)$,

oder $\frac{3S}{s^3} + \frac{2\mu^2 S}{s^3} + g(1 + \mu^2) = 4\pi\varrho \cdot \frac{2}{15}\mu^2$ $= \frac{8}{15}\pi\varrho\mu^2$, und wenn man das zweyte Glied linker Hand, als unbedeutend gegen das erstere, so wie den Factor μ^2 aus dem dritten Gliede wegwirft:

$$\frac{3S}{s^3} + g = \frac{8}{15}\pi\varrho\mu^2, \text{ also } \mu^2 = \frac{15}{8\pi\varrho}\left(g + \frac{3S}{s^3}\right).$$

5) Eben so, für $\left(\frac{d\,F\mu'}{d\mu'}\right)$ die Reihe $\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\mu^2$ $- \frac{3}{10}\mu'^2$ gesetzt, giebt $\frac{3M}{nk^3}\left(\frac{d\,F\mu'}{d\mu'}\right) = \frac{3M}{k^3}$ $(1 + \mu'^2)\left(\frac{d\,F\mu'}{d\mu'}\right) = 4\pi\varrho(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\mu^2 + \frac{1}{5}\mu'^2)$, daher erhält man durch die zweyte Gleichung (2): $4\pi\varrho(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\mu^2 + \frac{1}{15}\mu'^2) + \frac{S}{s^3} = 4\pi\varrho(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\mu^2$ $+ \frac{1}{5}\mu'^2) + (1 + \mu'^2)\left(\frac{S}{s^3} - g\right)$, oder $\frac{8\pi\varrho\mu'^2}{15}$ $+ \frac{\mu'^2 S}{s^3} - (1 + \mu'^2)g = 0$, und da man aus 4 schon gesehen hat, daß $\frac{S}{s^3}$ mit g gleichen Grad der Kleinheit hat, so darf man $\frac{\mu'^2 S}{s^3}$ und $\mu'^2 g$ weglassen,

weshalb bloß: $\frac{8}{15}\pi\varrho\mu'^2 - g = 0$ bleibt, welches $\mu'^2 = \frac{15g}{8\pi\varrho}$ giebt.

6) Folglich sind die drey halben Axen dieses Sphäroides:

$$k, k(1 + \tfrac{1}{2}\mu^2), k(1 + \tfrac{1}{2}\mu'^2) =$$

$$k, k\left[1 + \frac{15}{16\pi\varrho}\left(g + \frac{3S}{s^3}\right)\right], k\left(1 + \frac{15g}{16\pi\varrho}\right).$$

§. 84.

Man nehme den mittleren Halbmesser des Mondes zur Einheit an, so ist die Masse des Mondes sehr nahe $= \frac{4}{3}\pi\varrho$. Da er ferner mit eben der Winkelgeschwindigkeit sich dreht, mit der er um die Erde läuft, so ist die Schwungkraft, die aus dieser Rotation entspringt, in der Distanz s von der Axe = der Schwungkraft des Mondes bey seinem Umfe um die Erde, oder = der Central-Kraft die hier statt findet, also $= \frac{S}{s^2}$, und da die Schwungkräfte bey einerley Rotation sich verhalten, wie die Distanzen von der Axe, so ist $g = \frac{S}{s^3}$. Nennt man nun i : 1 das Verhältniß der Masse der Erde zu der des Mondes, so hat man $S = \frac{4}{3}\pi\varrho i$, $g = \frac{4\pi\varrho i}{3s^3}$,

folglich werden die halben Axen: k, $k\left(1+\frac{5i}{s^3}\right)$, $k\left(1+\frac{5i}{4s^3}\right)$.

§. 85.

Die Rotationsaxe des Mondes oder die auf seiner Bahn senkrechte ist also die kürzeste; die welche der Erde zugekehrt ist, die längste, uud ihr Ueberschuß über jene 4 mal so groß, als um wieviel die dritte, die auch in der Mondsbahn liegt, die erstere übertrifft. Dieses Verhältniß findet bey allen Trabanten statt, weil, wie gesagt, eben die Umstände bey ihnen eintreffen.

§. 86.

Nennt man λ den scheinbaren Halbmesser des Mondes, so ist $s = \frac{1}{\text{Sin}\,\lambda}$, oder $\frac{1}{s} = \text{Sin}\,\lambda$, $\frac{i}{s^3} = i\,\text{Sin}\,\lambda^3$. Nun ist λ in mittlerer Distanz des Mondes von der Erde $= 15'45''$, also $\text{Sin}\,\lambda^3 = 0{,}0000000961605$, und $i = 70$ beynahe, also $\frac{i}{s^3} = 0{,}000006731235$, daher wird in der Voraussetzung, daß der Mond anfangs, wie sich seine Gestalt gebildet hat, homogen und flüssig gewesen sey, das Verhältniß seiner Axen:

$$k, \frac{29712}{29711}\,k, \frac{118845}{118844}\,k.$$

§. 87.

Die meisten Schriftsteller, welche von der Ebbe und Fluth handeln, betrachten das momentane Gleichgewicht (80) im Körper, den sie entweder als ganz flüssig, oder (wie die Erde) nur auf der Oberfläche mit einem Fluidum bedeckt annehmen, und suchen diesem zu Folge das Verhältniß seiner Axen. Dabey wird nun vorausgesetzt, daß er diese Gestalt unverändert beybehalte, und nur die Lage seiner einen Axe, die dem anziehenden Körper zugekehrt ist, beständige Aenderungen leide, so wie letzterer relativ sich fortbewegt. Indeß hat schon Euler die völlige Richtigkeit dieses Verfahrens bezweifelt, indem er den Gedanken äußert, daß durch dies stete Bestreben der Theile, sich ins Gleichgewicht zu setzen, Oscillationen entstehen, die eigenen Gesetzen folgen, und sich nicht auf jene Weise bestimmen lassen. Diese Bewegungen der Theile sind kein Gegenstand der Hydrostatik mehr, sondern müssen nach mechanischen Principen untersucht werden, und dazu hat d'Alembert in seinen Recherches sur la cause générale des vents zuerst einen Weg gezeigt, welcher vorzüglich auf seinem bekannten dynamischen Principe beruht.

Die neuesten Untersuchungen über diesen Gegenstand sind von de la Place, der d'Alemberts Verfahren durch feinere Kunstgriffe im Calcul, zu einer Vollkommenheit erhoben hat, die vielleicht alles was sich hier bestimmen läßt, erschöpft. Der

theoretische Theil dieser Abhandlung steht in Mem. de l'Ac. Roy. d. Sc. 1775, diesem folgt eine Anwendung auf die Erde und Ausführung der Rechnung im Bande für 1776.

Etwas über das Gesetz der Anziehung.

§. 88.

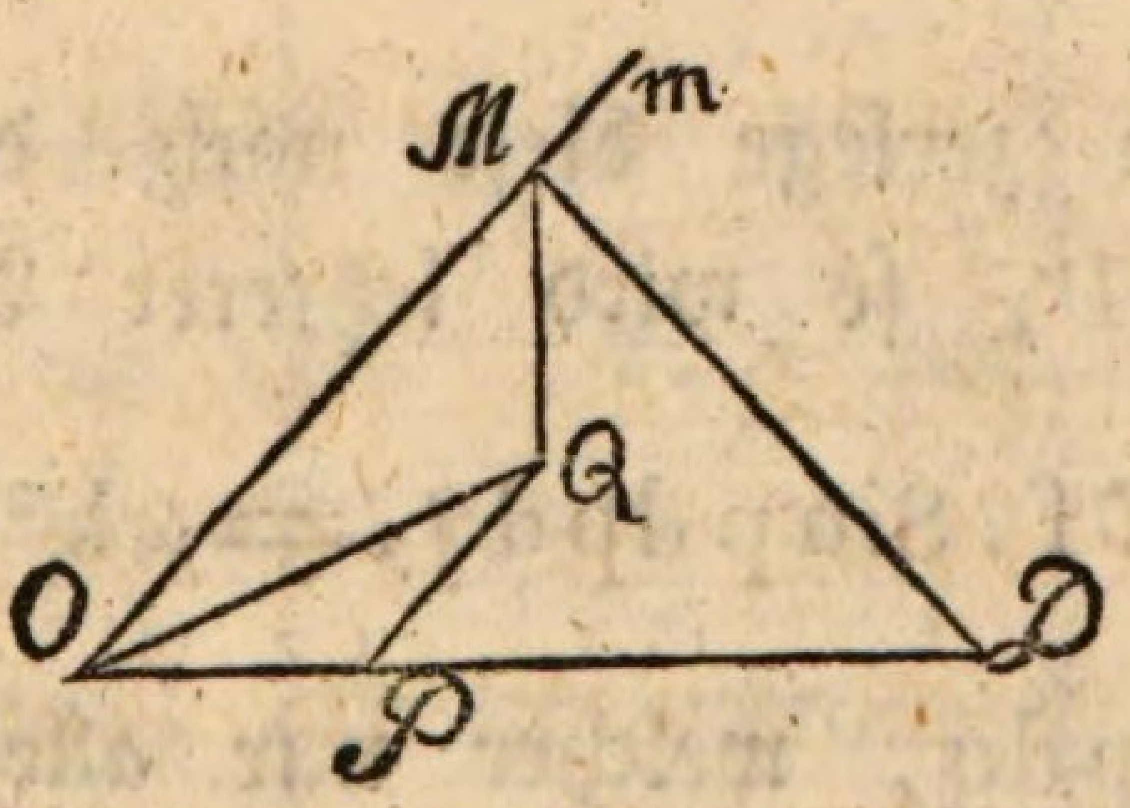
Nach dem Newtonischen Gesetze der Schwere zieht eine Kugel so an, als wäre ihre ganze Masse im Mittelpuncte vereinigt. Diese Eigenschaft vereinfacht die Theorie der Bewegung der Himmelskörper ungemein, und führt sie auf die Mechanik der Puncte zurück. Die Folgen daraus werden von der Erfahrung aufs Genaueste bestätigt, und selbst das, was man findet, wenn man das erwähnte Gesetz auf die Gestalt der Planeten anwendet, trifft mit ihr überein; ein Zeichen, daß es auch für geringe Entfernungen noch wahr seyn müsse. Wollte man also über die Möglichkeit anderer Gesetze der Anziehung Untersuchungen anstellen, so dürfte man ohne Bedenken alle diejenigen davon ausschließen, denen jene Eigenschaft nicht zukommt, und es bliebe nur zu wissen übrig, ob noch andere Gesetze vorhanden seyn können, nach denen eine Kugel so anzieht, als wäre ihre Masse im Mittelpuncte vereinigt.

§. 89.

Wird dies von einer Kugel vorausgesetzt, so muß es auch von einer concentrischen Kugelschicht

gelten: denn man setze die Entfernung des angezogenen Punctes D vom Mittelpuncte = a, den Halbmesser der innern Fläche = r, der äußern = r′, so würde, wenn der hohle Kugelraum ausgefüllt wäre, die Anziehung = $\frac{4}{3}\,\frac{\pi r'^3}{a^2}$ nach DO seyn; wird davon die Kraft $\frac{4}{3} \cdot \frac{\pi r^3}{a^2}$ subtrahirt, womit die inwendige Kugel nach eben der Richtung den Punct D anzieht, so bleibt für die Anziehung der dazwischen enthaltenen Schicht $\frac{\frac{4}{3}\pi(r'^3 - r^3)}{a^2}$ übrig, wovon der Zähler die Masse derselben ausdrückt; d. h. die Kugelschicht zieht ebenfalls so an, als wäre ihre ganze Masse im Mittelpuncte vereinigt. Gesetze also, die dies nicht bewürken, leisten auch der Forderung für die Kugel kein Gnüge.

§. 90.



Man nehme die Kugelschicht von unendlich kleiner Dicke an, und setze diese = ω. Es sey M ein Punct in ihrer inwendigen Oberfläche, der Radius OM = k, der Winkel MOD = p, und der Nei-

gungswinkel der Ebene MOP gegen eine feste Ebene QOD, die man als ersten Meridian der Kugel ansehen kann, $= q$. Dies wird die Länge des Punctes M seyn. Nach dieser Vorbereitung ist nun:

1) Im Dreyecke OMD, wenn man $MD = f$ setzt: $f^2 = a^2 - 2ak \operatorname{Cos} p + k^2$, also f bloß von p und a abhängig, und nicht von q, welches auch daraus klar ist, daß für verschiedene Meridiane das Dreyeck, bey einerley a und p, dasselbe bleibt.

2) Das Element der Kugelrinde bey M ist $= \omega \times kdp \times k \operatorname{Sin} pdq = \omega k^2 \operatorname{Sin} pdpdq$. Bedeutet nun φf eine Function von f, die das gesuchte Gesetz der Anziehung ausdrückt, (beym Newtonischen Gesetze wäre $\varphi f = \frac{1}{f^2}$) so wird die Kraft, womit dies Element den Punct D anzieht $= \omega k^2 \varphi f \,.\, \operatorname{Sin} pdpdq$, und MD ihre Richtung.

3) Man zerlege diese nach den Richtungen PM und DP, so wird letzterer Antheil $= \operatorname{Cos} ODM \,.\, \omega k^2 \varphi f \,.\, \operatorname{Sin} pdpdq, = \omega k^2 \left(\frac{f^2 + a^2 - k^2}{2af}\right) \varphi f \,.\, \operatorname{Sin} pdpdq$, welcher nur allein in Betracht kommt, da ersterer durch eine entgegengesetzte Kraft allemal aufgehoben wird.

4) Dies Differenzial integrire man für einerley p und folglich auch für einerley f (1) nach q,

indem man von $q = 0$ bis $q = 360°$ geht, so wird die Anziehung des Ringes, der allenthalben von D um MD absteht, $= 2\pi\omega k^2 \left(\frac{f^2 + a^2 - k^2}{2a}\right)$ $\varphi f \operatorname{Sin} p\, dp$.

5) Da f von p abhängt, so hätte man nur noch nach p zu integriren; aber dies geht wegen der unbestimmten Function von f nicht, die darinn vorkommt. Man reducire also lieber p auf f, und integrire dann nach f.

6) Zu dem Ende war $f^2 = a^2 - 2ak \operatorname{Cos} p + k^2$, woraus man $fdf = ak \operatorname{Sin} p\, dp$ erhält; dadurch verwandelt sich das Differenzial (4) in $\frac{2\pi\omega k}{a} \left(\frac{f^2 + a^2 - k^2}{2af}\right) \varphi f \cdot fdf$, und folglich wird die Anziehung der ganzen Kugelschicht nach der Richtung DO $= \frac{2\pi\omega k}{2a^2} \int df \varphi f (f^2 + a^2 - k^2)$ $= \frac{2\pi\omega k}{2a^2} (\int f^2 df \varphi f + (a^2 - k^2) \int df \varphi f)$, von $p = 0$ bis $p = 180°$, d. i von $f = a - k$ bis $f = a + k$ genommen.

7) Man setze: $\int f^2 df \cdot \varphi f = \Pi f$, $\int df \cdot \varphi f = \psi f$, und nehme diese Integrale von $a - k$ bis $a + k$, so erhält man:

$$\frac{2\pi\omega k}{2a^2} [\Pi(a + k) - \Pi(a - k) + (a^2 - k^2) [\psi(a + k) - \psi(a - k)]].$$

8) Soll nun die Kugelschicht so anziehen, als wäre alle ihre Masse im Mittelpuncte vereinigt, so muß die Anziehung auch $= 4\pi\omega k^2 \varphi a$ seyn, indem $4\pi\omega k^2$ der Ausdruck für ihre Masse ist. Man hat also:

$$\Pi(a+k) - \Pi(a-k) + (a^2 - k^2) [\psi(a+k) - \psi(a-k)] = 4a^2 k \varphi a.$$

9) Man differenziire diese Gleichung nach a, so wird: $\Pi'(a+k) - \Pi'(a-k) + (a^2 - k^2) [\psi'(a+k) - \psi'(a-k)] + 2a[\psi(a+k) - \psi(a-k)] = 8ak\varphi a + 4a^2 k \varphi' a.$

10) Nun ist $\Pi a = \int a^2 da \varphi a$, und $\psi a = \int da \varphi a$, also $\Pi' a = a^2 \varphi a$, $\psi' a = \varphi a$, folglich $\Pi' a = a^2 \psi' a$, und $\Pi'(a+k) = (a+k)^2 \psi'(a+k)$ u. s. w. Dies giebt:

$$[(a+k)^2 + a^2 - k^2] \psi'(a+k) - [(a-k)^2 + a^2 - k^2] \psi'(a-k) + 2a[\psi(a+k) - \psi(a-k)] = 8ak\psi' a - 4a^2 k \psi'' a,$$ oder indem man die Coefficienten vereinigt, und allenthalben durch 2a dividirt:

$$(a+k)\psi'(a+k) - (a-k)\psi'(a-k) + \psi(a+k) - \psi(a-k) = 2k(2\psi' a + a\psi'' a).$$

11) Da $\psi'(a \mp k) = \psi' a \mp k \psi'' a + \frac{k^2}{1 \cdot 2} \psi''' a \mp$ u. s. f., so wird $(a+k)\psi'(a+k) = a\psi' a + k(a\psi'' a + \psi' a) + \frac{k^2}{1 \cdot 2}$

$(a\psi'''a + 2\psi''a) + \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a\psi''''a + 3\psi'''a) + \ldots. (a-k)\psi'(a-k) = a\psi'a - k(a\psi''a + \psi'a) + \frac{k^2}{1 \cdot 2}(a\psi'''a + 2\psi''a) - \frac{k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a\psi''''a + 3\psi'''a) + \ldots$ und weil die Coefficienten beyder Reihen übereinkommen, so ist die Differenz dieser beyden Reihen =

$$2k(a\psi''a + \psi'a) + \frac{2k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a\psi''''a + 3\psi'''a) + \ldots$$

12) Kommt hierzu die Reihe:

$\psi(a+k) - \psi(a-k) = 2k\psi'a + \frac{2k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\psi'''a + \ldots$, so wird endlich:

$$2k(a\psi''a + 2\psi'a) + \frac{2k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a\psi''''a + 4\psi''a) + \ldots = 2k(a\psi''a + 2\psi'a)(10).$$

13) Ist also a gegen k sehr groß, so daß die übrigen Glieder nicht in Betracht kommen, so hat man eine identische Gleichung; woraus erhellet, daß für sehr große Entfernungen jedes Gesetz der Anziehung der Forderung Gnüge leiste.

14) Nimmt man auf beyden Seiten $2k(a\psi''a + 2\psi'a)$ weg, und dividirt mit $\frac{2k^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ so erhält man:

$$a\psi''''a + 4\psi'''a + \frac{k^2}{4 \cdot 5}(a\psi''''''a + 6\psi'''''a)$$

$$+ \frac{k^4}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}(a\psi''''''''a + 8\psi'''''''a) \ldots$$

$= o$, wo allemal der Factor des zweyten Theiles in jedem Coefficienten = der Ordnungszahl der vor ihm stehenden Differenzial-Größe ist.

15) Da diese Reihe für jedes k wahr seyn muß, so muß der Coefficient eines jeden Gliedes an sich = o seyn. Man bekommt also die Gleichungen.

$a\psi''''a + 4\psi'''a = o$, $a\psi''''''a + 6\psi'''''a = o$, u. s. f.

16) Erstere giebt $\frac{\psi''''a}{\psi'''a} = -\frac{4}{a}$, oder $\frac{d\psi'''a}{\psi'''a} = -\frac{4da}{a}$, also integrirt: $\log\psi'''a = \log H - \log a^4$, und folglich $\psi'''a = \frac{H}{a^4}$, also $\psi''a = \int da\psi'''a = H' - \frac{H}{3a^3}$, und $\psi'a = \varphi a = H'' + aH' + \frac{H}{6a^2}$.

17) Aus den andern Gleichungen folgt $\psi'''''a = \frac{F}{a^5}$, $\psi'''''''a = \frac{K}{a^8}$ u. s. w., welche alle mit der erstern übereinstimmen. Demnach haben wir für φa einen Ausdruck der Form $C'' + aC' + \frac{C}{a^2}$.

18) Es läßt sich jetzt zeigen, daß C' und C'', beyde $= 0$ seyn müssen. Was nemlich C' betrifft, so ist $\psi a = \int da \varphi a = C''' + aC'' + \frac{1}{2} a^2 C' - \frac{C}{a}$, also $\psi(a+k) - \psi(a-k) = 2kC'' + akC' + \frac{2kC}{a^2 - k^2}$; $(a+k)\psi'(a+k) - (a-k)\psi'(a-k) = 2kC'' + 2akC' - \frac{2kC}{a^2 - k^2}$; und $\psi'' a = C' - \frac{2C}{a^3}$. Dies in die Gleichung (10) substituirt, giebt:

$4kC'' + 3akC' = 4kC'' + 6akC'$, also $3akC' = 0$, $C' = 0$.

19) Also $\varphi a = C'' + \frac{C}{a^2}$. Dadurch wird $\Pi(a+k) - \Pi(a-k) = (2a^2k + \frac{2}{3}k^3)C'' + 2kC$; $(a^2 - k^2)[\psi(a+k) - \psi(a-k)] = (a^2 - k^2)\left(2kC'' + \frac{2kC}{a^2 - k^2}\right) = (2a^2k - 2k^3)C'' + 2kC$, und $4a^2k\varphi' a = 4kC$. Diese Werthe in der Gleichung (9) gebraucht, geben:

$(4a^2k - \frac{4}{3}k^3)C'' = 0$, folglich $C'' = 0$.

20) Demnach wird $\varphi a = \frac{C}{a^2}$, d. h. kein anderes Gesetz erfüllt die vorgeschriebene Bedingung, als das Newtonische.

Anmerkung. Von n. 3 an, ist der Gang der Analysis anders als bey Hrn. de la Place. Um mich hierüber zu rechtfertigen, will ich sein Verfahren ganz kurz hieher setzen:

1) Setzt man statt Cos ODM (3) nicht, wie hier geschehen ist, $\frac{f^2 + a^2 - k^2}{2af}$, sondern $\left(\frac{df}{da}\right)$ (s. die Note zu §. 77.), so wird das Integral: $\frac{2\pi\omega k}{a} \int f\,df\,\varphi f \left(\frac{df}{da}\right)$. Man setze jetzt $\int df\,\varphi f = \psi f$, so hat man $\left(\frac{df}{da}\right) \varphi f = \left(\frac{d\psi f}{da}\right)$, also wird das Integral $= 2\pi\omega k \int \frac{f\,df}{a} \left(\frac{d\psi f}{da}\right)$

2) Nimmt man nun an, daß $\int \frac{f\,df}{a} \left(\frac{d\psi f}{da}\right)$ $= \left(\frac{d \frac{1}{a} \int f\,df\,\psi f}{da}\right)$ sey (nach der Analogie des Hülfssatzes 3.), so verwandelt sich das Integral, indem man $\int f\,df\,\psi f = \Pi f$ setzt, in $2\pi\omega k$ $\left(\frac{d \frac{1}{a} \Pi f}{da}\right)$, welches von $f = a - k$ bis $f = a + k$ genommen,

$$= 2\pi\omega k \left(\frac{d \frac{1}{a} [\Pi(a+k) - \Pi(a-k)]}{da}\right)$$

wird.

3) Dies muß $= 4\pi\omega k^2 \varphi a$ seyn. Gebraucht man nun für $\Pi(a+k) - \Pi(a-k)$ die Reihe: $2k\left(\Pi'a + \frac{k^2}{1.2.3}\Pi'''a + ..\right)$, so erhält man die Gleichung:

$$\left(\frac{d\left(\frac{1}{a}\Pi'a\right)}{da}\right) + \frac{k^2}{1.2.3}\left(\frac{d\left(\frac{1}{a}\Pi'''a\right)}{da}\right) .. = \varphi a.$$

4) Da $\Pi'a = a\psi a$ (2) ist, so wird das erste Glied $= \frac{d\psi a}{da} = \varphi a$, also müssen die Coefficienten der übrigen Glieder $= 0$ seyn. Daraus folgen die Gleichungen:

$$\left(\frac{d\left(\frac{1}{a}\Pi'''a\right)}{da}\right) = 0, \left(\frac{d\left(\frac{1}{a}\Pi'''''a\right)}{da}\right) = 0 \text{ u. s. f.}$$

5) Erstere giebt, nach wiederhohlter Integration $\Pi a = H''' + aH'' + a^2H' + a''''H$ und dem entsprechen auch die folgenden Gleichungen.

6) Also wird $a\psi a = \Pi'a = H'' + 2aH' + 4a^3H$, und $\psi a = \frac{H''}{a} + 2H' + 4a^2H$, folglich $\psi'a = \varphi a = 8aH - \frac{H''}{a^2}$, so daß φa unter der Form $C' + \frac{C}{a^2}$ begriffen ist, wie wir oben gefunden haben.

Die ganze Folge dieser Schlüsse beruhet, wie man leicht sieht, auf dem einen Satze, daß $\int\frac{fdf}{a}$

$\left(\frac{d\psi f}{da}\right) = \left(\frac{d\frac{1}{a} f \int df \psi f}{da}\right)$ sey. Dieser Satz läßt sich aber doch wol nicht rechtfertigen; denn wenngleich $\int df \left(\frac{d\psi f}{da}\right) = \left(\frac{d \int df \psi f}{da}\right)$ ist, und dies selbst wahr bleibt, wenn man fdf statt df setzt, so darf man doch dabey nie außer Acht lassen, unter was für Umständen der Satz wahr sey. Diese sind:

1) f darf nicht von a abhängen, sondern was in ψf von a enthalten ist, muß durch die Beschaffenheit der Function hineinkommen.

2) Nach der Integration darf man nicht f = a oder = einer Function von a setzen, weil dadurch $\int df \psi f$ zu einer ganz andern Function von a wird, als es ohne dies der Fall gewesen wäre.

3) Was außer $\left(\frac{d\psi f}{da}\right)$ unter dem Integral-Zeichen steht, muß eine bloße Function von f seyn, und darf kein a enthalten.

Keine dieser Bedingungen wird hier erfüllt, also ist der Satz in zu weiter Ausdehnung genommen. Dies sind die Gründe die mich nöthigten von Herrn de la Place bey dieser Untersuchung abzuweichen.

Berlin 1800.
Gedruckt bei Johann Wilhelm Schmidt.

Verbesserungen.

Seite 3 Zeile 3 statt $n+1\,k(n+1)$ lies $(n+1)\,k(n+1)$.

" 11 " 10 st. $\frac{1}{1\,.\,2}\,x$ lies $\frac{1}{1\,.\,2}\times$

" 15 " 5 von unten statt z lies Z

" 20 fällt n 11 ganz weg; dafür setze man folgende Anmerkung: Allgemein erweislich wird das Gesetz dieser Reihen für Z' und Z'' nur durch Zuziehung folgendes bekannten Satzes, der sich leicht darthun läßt:

Es bekomme für $t = a$, a', a'' u. s. f., die Function z die Werthe ζ, ζ', ζ'' u. s. f.; so ist, wenn $\delta\zeta$, $\delta^2\zeta$, $\delta^3\zeta$ u. s. f. in voriger Bedeutung genommen werden:

$$z = \zeta + (t-a)\,\delta\zeta + (t-a)\,(t-a')\,\delta^2\zeta + (t-a)\,(t-a')\,(t-a'')\,\delta^3\zeta + \ldots$$

Man setze nun $a = t+i$, $a'' = t+i'$, $a'' = t+i''$ u. s. f.; so wird $t-a = -i$, $t-a' = -i'$ u. s. f. Dies in die Formel substituirt, giebt:

$$z = \zeta - i\,\delta\zeta + i\,.\,i'\,\delta^2\zeta - i\,.\,i'\,.\,i''\,\delta^3\zeta + \text{u. s. f.}$$

Daraus folgt: $\frac{dz}{dt} = -\left(\frac{di}{dt}\right)\delta\zeta + \left(\frac{d\,ii'}{dt}\right)\delta^2\zeta$

$-\left(\frac{d\,ii'i''}{dt}\right)\delta^3\zeta +$ u. s. f.

Aber $\frac{di}{dt} = \frac{di'}{dt}$ u. s. f. $= -1$; also ferner $\frac{d\,ii'}{dt}$
$= -(i+i')$; $\frac{d\,ii'i''}{dt} = -(ii' + ii'' + i'i'')$
u. s. f. Man bekommt also: $\frac{dz}{dt} = \delta\zeta - (i+i')$
$\delta^2\zeta + (ii' + ii'' + i'i'')\delta^3\zeta -$ u. s. f., wobey das Gesetz, wie sich die Coefficienten bilden, in die Augen fällt. Setzt man nun $t = \vartheta$, so wird $\frac{dz}{dt} = Z'$,
$a = \vartheta + i$, $a' = \vartheta + i'$ u. s. f.

Ferner wird: $\frac{d^2z}{2dt^2} = -\frac{d(i+i')}{2dt}\cdot\delta^2\zeta$

$+ \frac{d(ii' + ii'' + i'i'')}{2dt}\delta^3\zeta - \ldots$

$= \delta^2\zeta - (i + i' + i'')\delta^3\zeta + \ldots$

wobey sich auch das Gesetz der Coefficienten leicht offenbart.

Für $t = \vartheta$, hat man dann wieder $\frac{d^2z}{2dt^2} = Z''$,

$a = \vartheta + i$, $a' = \vartheta + i'$ u. s. f.

Seite 28. In der Fig. zu § 3. muß bF # Bc seyn. Dieselbe Figur kommt nachher noch einigemal vor.

Seite 28 Zeile 3 von unten, statt — lies =.

„ 33 „ 9 statt d^2x lies d^2u.

„ 35 „ 3 von unten statt dem erstern = l. +,

„ 36 „ 10 statt $d\varphi dy$ lies $d\varphi$, dy.

„ 46 §. 15 Durch ein Versehen ist hier eine sonderbare Zweydeutigkeit entstanden. Ich hatte nemlich für die eccentr. Anomalie das Zeichen ϖ des Herrn de la Place beybehalten, welches aber im Drucke mit π umgetauscht ist. Man kann diesen Fehler dadurch verbessern, daß man, wo $\frac{1}{2}\pi$, und π — e Sin π vorkommt, ϖ statt π schreibt.

„ 54 „ 7 und 11 statt $\frac{100}{98}$ lies $\frac{103}{98}$.

„ 65 „ 2 von unten statt de lies du.

„ 107 §. 49. Für das ϑ, welches die Zeit betrifft, setze man θ.

„ 115 Zeile 10 u. f. statt 8 lies ♉.

„ 152 „ 2 von unten statt $\left(\frac{dz}{dy}\right) dy$ lies

$$\mu\nu = \left(\frac{dz}{dy}\right) dy.$$

„ 164 „ 12 statt $z = o$ lies $z, = o$.

„ 165 „ 2 von unten statt $\int(a - x)$ lies $\int(a - x)\, dx$.

„ 183 „ 1 statt b die lies b, die.

„ 184 „ 4 von unten statt (4) lies (Lemma 8).

„ 185 „ 7 „ „ „ s lies (5).

Seite 196 Zeile 5 von unten statt $F\frac{\mu}{2}$ lies $F + \frac{\mu}{2}$

ebendas. " $\frac{1}{2\mu}$ lies $\frac{1}{2\mu} \times$.

" 197 " 6 statt $dx = \frac{dx}{1 + \mu^2 x^2}$ lies

$$dx - \frac{dx}{1 + \mu^2 x^2}.$$

" 214 " 4 statt hat lies haben.

" 227 " 1 von unten statt nach lies von.

" 233 " 6 statt $\frac{QO}{MQ} \frac{dz}{dy}$ lies $\frac{QO}{MQ}, \frac{dz}{dy}$.

" 237 " 12 statt) C lies), C.

" " " 1 von unten statt $\frac{L - g}{L}$ lies $\frac{L' - g}{L}$.

" 238 " 1 " " " = lies —.

" 272 " 10 statt erfordert lies erlaubt.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Laplace, Pierre Simon <<de>>, / Ide, Johann Joseph Anton, / Kästner, Abraham Gotthelf,

Theorie der Bewegung der Weltkörper unseres Sonnensystems, und ihrer elliptischen Figur nach Herrn de la Place frey bearbeitet

Berlin 1800

Astr.p. 70
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10060529-8
VD18 13754351